Шифр: А - 4

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2017/2018
Ленинградская область

Район Ломоносовский
Город Сосновый Бор
Школа МБОУ „Лицей №8"

Класс 9 „А"

ФИО *Чигарев Андрей Сергеевич

А - 4

| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 7 | 0 | 0 | 1 | 15 |

№ 9.8.

Наименьшее простое число - три. Также заметим, что сумма двух простых чисел - число чётное, так как простые числа нечётные. То есть, сумма $q$ различных степеней числа $n$ равна четному числу, большему или равному 5 (2 и 3). Нам дали возможность использовать любые степени ($\geq 0$) числа $n$. Из этого следует, что можно получить некоторые числа из основных. Основными являются, конечно, 2 и 3:

$4 = 2^2$, $5 = 2+3$, $1 = 3-2$, $2 = 2$, $3 = 3$,

$6 = 2 \cdot 3$, $7 = 2^2+3$, $8 = 2^3$ или $2+3+3$,

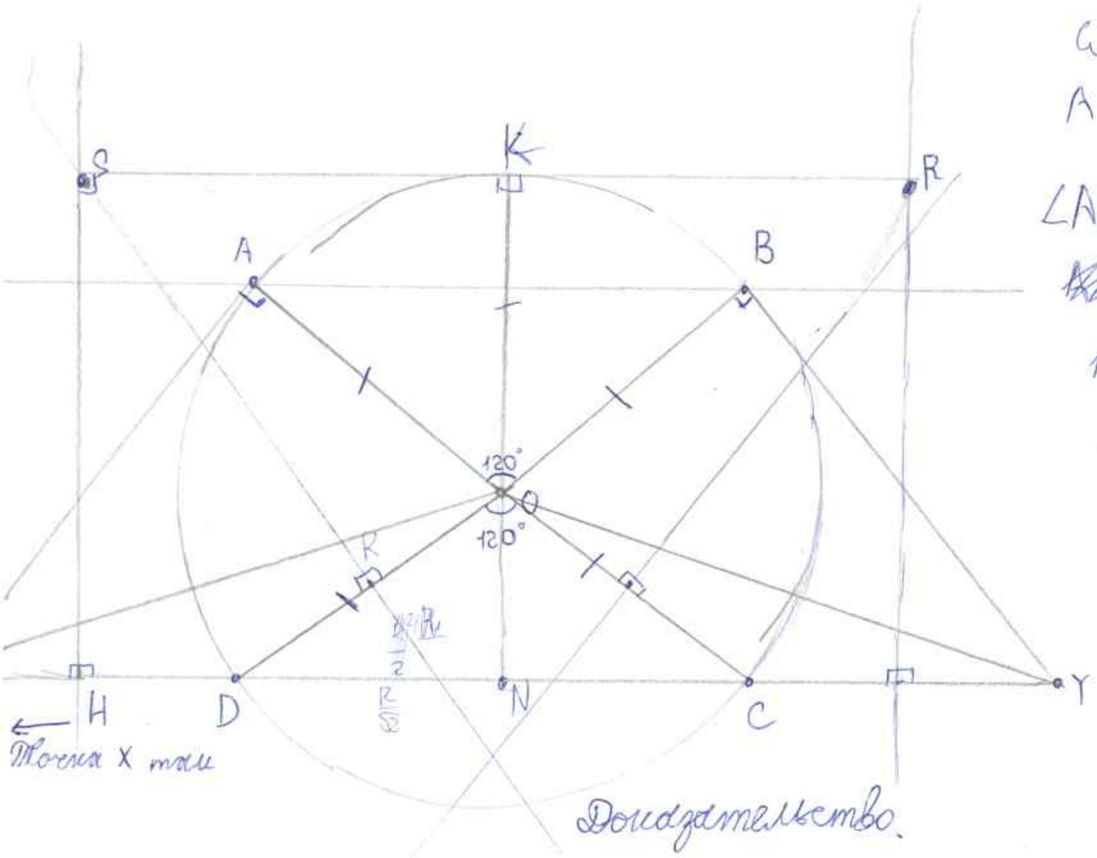
$9 = 3^2$, $10 = 2 \cdot 3 + 2^2$ и так далее.

Из этого следует, что для суммы двух простых чисел „хорошими" числами будут являться не более двух чисел.

Итак, Серёжа не мог получить больше двух „хороших" чисел для любой пары простых чисел.

Ч.Т.Д.

# № 9.9.




Дано:

$\omega$ - окружность
$AB, CD$ - хорды
$\angle AOB = \angle COD = 120°$
$AX, BY$ - касательные.
$\triangle DOX, \triangle COY, L.$

Док-ть, что:

$L$ - касательная к $\omega$

Доказательство.

Найдем центры описанных окружностей около $\triangle DOX$ и $\triangle COY$. Они лежат на пересечении серединных перпендикуляров к их сторонам.

$AB \parallel CD$, т.к. хорды не пересекаются.

$OA = OB = OC = OD$, как радиусы окружности.

$\Rightarrow \triangle DOC = \triangle BOA$, равнобедренные.

и $SH \perp DC$, $SH \perp SR$, $\Rightarrow SR \parallel DC$.

$\Rightarrow SR \perp OK$. Теперь докажем, что $SR$ касается $\omega$.

$OK = OD = OC = \ldots = R$. Докажем, что

$$\left.\begin{aligned} SH &= R + ON \\ ON^2 &= R^2 - DN^2 \\ D\cancel{AC}^2 &= R^2 + R^2 - \frac{2R^2}{2} \end{aligned}\right\} \text{По теореме косинусов}$$

$D\cancel{AC}^2 = R^2$

$DN = \frac{R}{2}$

$\Rightarrow ON = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = R\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(ПРОДОЛЖЕНИЯ НЕ ПРЕДВИДИТСЯ, Т.К. ВРЕМЯ)

А - 4

№ 9.7.

Заметим, что красную и зеленую фишки менять нельзя. Тогда получается, что в какой-то момент времени будет необходимо поменять местами зелёную и красную фишку, чего делать нельзя, так как синих фишек всего 40, и они не смогут „заполнить пробелы" между остальными. Если в случае 4 ~~красных~~ синих, 3 красных и 2 зеленых такое возможно:

(1) К - С - К - С - К - З - С - З - С

то в данном нам случае таких „пробелов" - 58 штук (если не считать „пробел" между ~~синим~~ красным и зеленым, который заполнения не требует), т.к. $C_{min} = К + З - 2$ (см. (1))

Получаем, что привести цепочку в описанное положение не удастся.

Ответ: Нет, нельзя.

№ 9.6

Итак, для того, чтобы иметь как можно меньше разрядов, наше число должно состоять преимущественно из девяток.

Разделив ~~22~~ 2018 на 9, получим 224 и

2 в остатке. Следовательно, наименьшее число - 2 999...99, содержащее одну двойку и 224 девятки. На втором месте - число 3899...99, содержащее одну тройку, одну восьмерку (т.к. сумма цифр — 2018) и 223 девятки, причем восьмерка может стоять на любом месте; вследствие этого ~~может~~ образуется целый ряд чисел, больших 3899...99. Итак, 224 таким числом будет 3999...8, стоящее в ряду заданных натуральных чисел на 225 месте. Итак, искомое число - 399...8, содержащее одну тройку и восьмёрку и 223 девятки.

Ответ: 399...8, содержащее одну тройку, одну восьмёрку и 223 девятки (225 значное число).

№ 9.10.

Отметим, что в каждой из 33 групп детей по 3 попарно дружащих человека, то есть 3 пары друзей. Пусть все из 99 детей дружат с сотым. Тогда, если выделят его, то все разобьются на группы по 3 человека. Если же выделят не его, то он сможет заменить выделенного, так как дружит со всеми. Посчитаем количество пар друзей в группах:

$3 \cdot 33 = 99$ пар.

~~При бавим~~ Прибавим к этому числу количество пар, которое все дети образовали с сотым ребёнком (кроме, конечно, его самого).

Итак, $99 + 100 - 1 = 198$.

Ответ: 198 пар.

A - 4 ~~7~~ и 11

ЧЕРНОВИК

~~9999...~~ 9..... 1

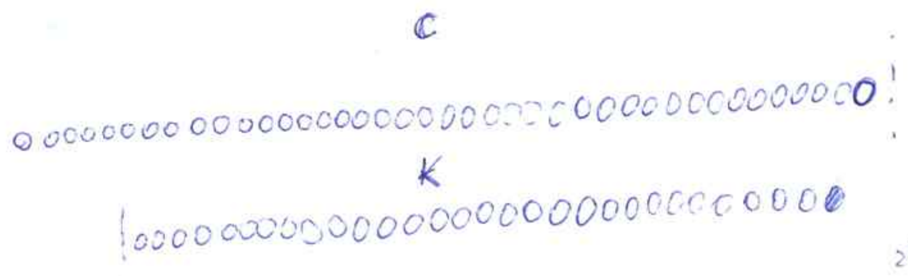
11 и 7

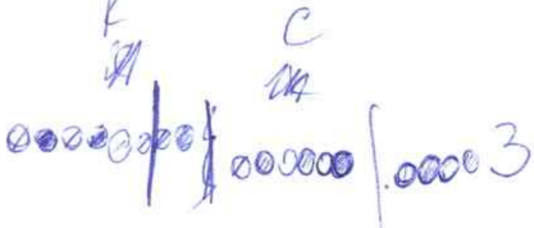
18

$3^2+3+3+3+3+3^2$

$\boxed{3^0+3^0+3^0+3+3+3^2}$

$\boxed{2^2+2^2+2^2+2+2+2^0+2^0}$





3 8 6 2

4 · k

×224

29999999999....

225

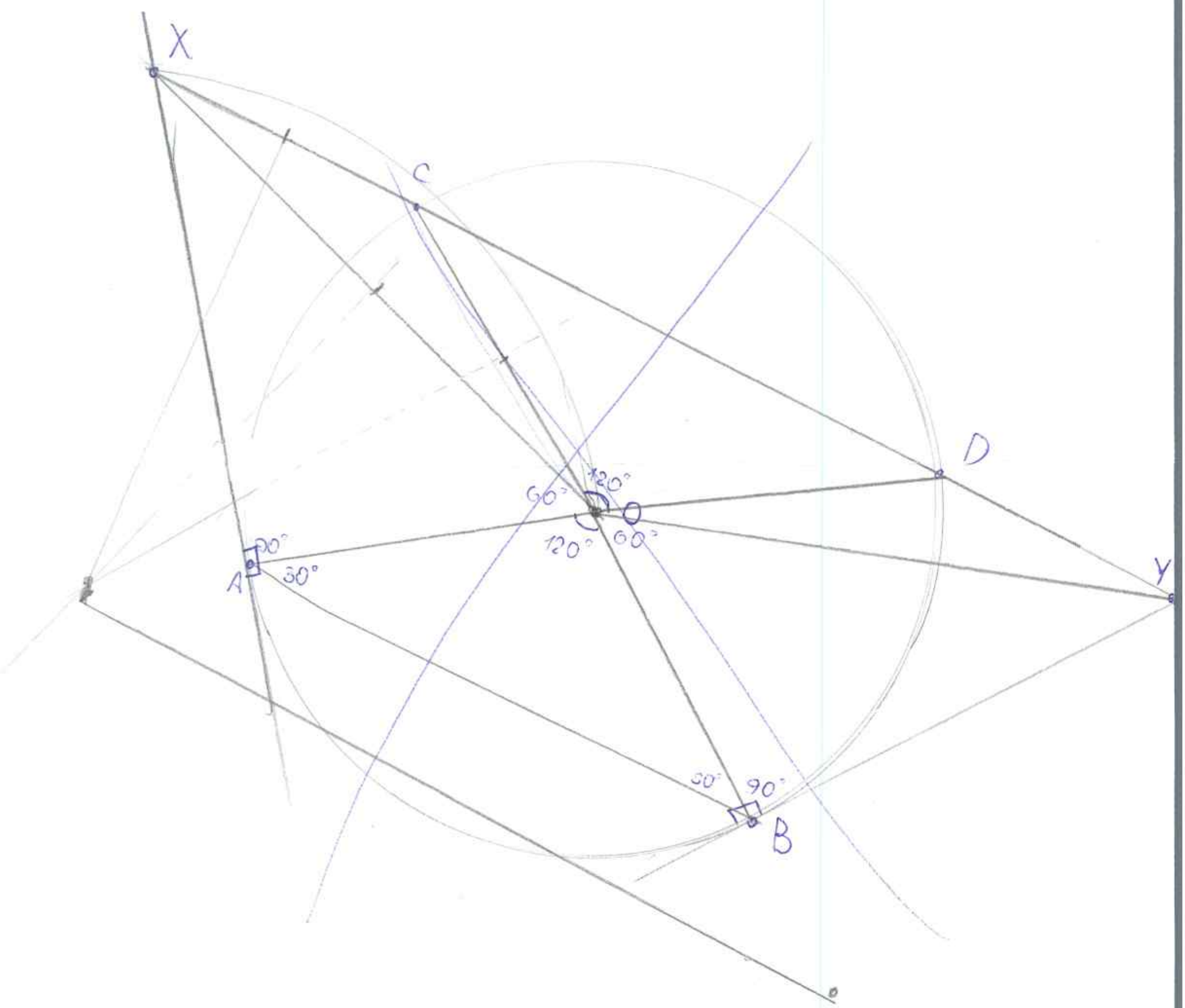
3, 4, 5, 6, 7, 8

Цифры можно „менять"!

10-198

$p+q = n^k + n_0^d - n_2^z \dots n_q^r$

$5, 3 \quad 2^1 + 2^1 + 2^2$



А - 4

А - 4

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 3 |
| 7 | 0 | 0 | X | 0 | 7 |

Задание №1.

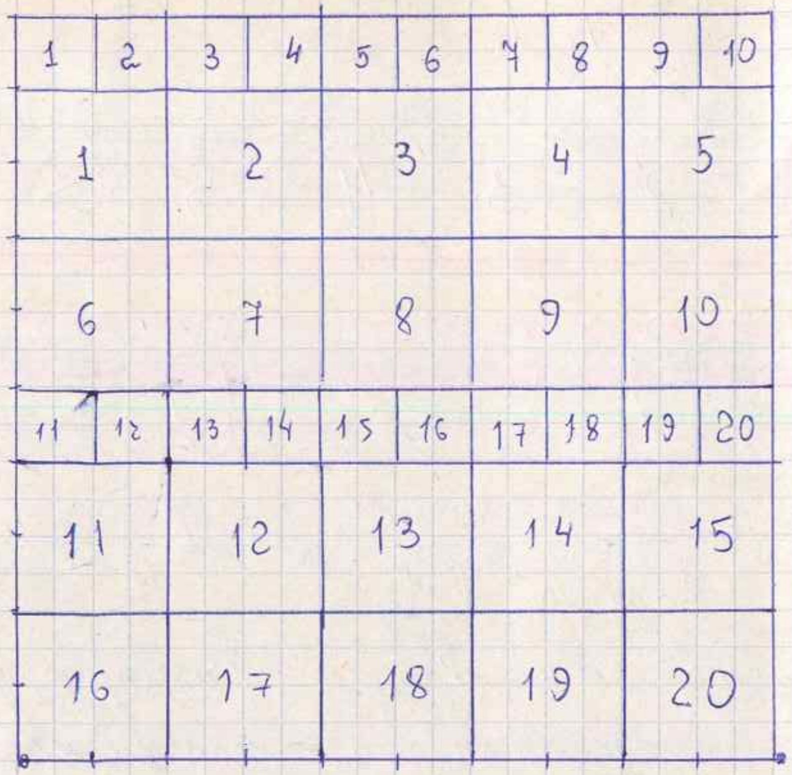
Пусть наш квадрат будет содержать квадратики со сторонами 2 и 1. Тогда, $S_1 = 1$, $S_2 = 4$. Так как их количество одинаково, то

$$\frac{4}{5}S - S_2 \cdot a \quad \Rightarrow \quad X : 5, \text{ где } X \text{ - сторона}$$

$$\frac{1}{5}S - S_1 \cdot a \qquad \text{большого квадрата}$$

Но $X : 2$, так как иначе квадратики со стороной два никуда не поставить; $\Rightarrow$ Минимальное $X$ - 10.

Сделаем рисунок:




Единичный отрезок - две клетки.

Квадратиков со сторонами 2 и 1 одинаковое количество, задача решена.

Задание № 2.

А) Предположим, что среди этих чисел лишь три (и менее) равны между собой. Обозначим числа так: $a, b, c, d, e$.

Тогда, пусть $a = b = c = n$

$\Rightarrow 3n \vdots d$ и $3n \vdots e$

$\Rightarrow 2n + d \vdots n, e$

А-4

A-4

$\Rightarrow d = 3n,\ e = n$

или

$d = n,\ e = 3n.$

Б) Теперь рассмотрим случай с двумя равными числами:

$$a = b = n$$

$\Rightarrow 2n + c \vdots d$ и $2n + c \vdots e$

$\Rightarrow c + n + d \vdots n$ и $c + n + d \vdots e$

$\Rightarrow c + n + e \vdots d$ и $c + n + e \vdots n$

$\Rightarrow e = n$ или $e = 3n + c \ldots$

Подходит лишь $e = n$.

Далее, рассуждая, как перед этим, получим, что 4 числа, равных между собой, будет.

В) Теперь предположим, что ни одно число не равно другому: $a = n$.

$n + b + c \vdots d$ и $n + b + c \vdots e$

(1) $n + b + d \vdots c$ и $n + b + d \vdots e$

$\Rightarrow c = d$ или $c = a(n + b + d) \cdot d.$

Неверно, т.к. выполняется (1)

Рассмотрев все случаи, получим, что среди выписанных чисел обязательно найдутся 4 равных.

Ответ: Да.

~~Задание № 5.~~

~~Воспользуемся данным условием:~~

$$\cancel{x^2+y^2+z^2=1.}$$

$$\cancel{\Rightarrow x^2+y^2=(z+1)(z-1)}$$

$$\cancel{\Rightarrow z^2-1\geq 0}$$

$$\cancel{z^2\geq 1, \Rightarrow z\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)}$$

~~Ровно~~

Задание № 5.

Воспользуемся данным условием:

$$x^2+y^2=1-z^2$$

$$\Rightarrow z^2\leq 1, \Rightarrow z\in[-1;1].$$

Рассуждая аналогично, получим, что $x\in[-1;1]$, $y\in[-1;1]$, $z\in[-1;1]$.

Теперь преобразуем данное нам выражение и найдём его макс-

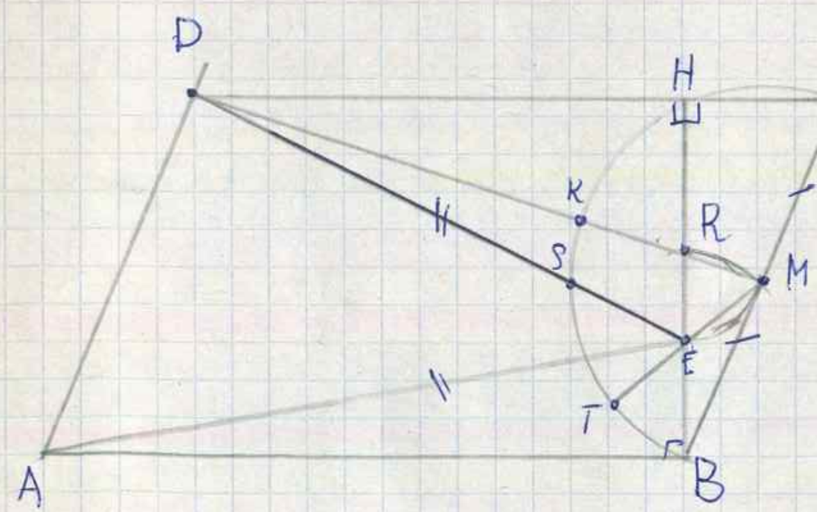
A-4

– „$(x-y)(y-z)(x-z)$". ~~Пусть~~ Хяdzz. A-4

Пусть $x$ – наибольшее число.

| $y > z$ | $y < z$ |
|---|---|
| $(x-y)$ – „+" | $(x-y)$ – „+" |
| $(x-z)$ – „+" | $(x-z)$ – „+" |
| $(y-z)$ – „+" | $(y-z)$ – „–" |
| MAX | MIN |

Задача № 3.




Дано:

ABCD-пар-м

$AE = DE$

$\angle ABE = 90^\circ$

$BM = MC$

Найти:

$\angle DME$-?

Начертим окружность, описанную около $\triangle CBH$ с центром в точке M.

Искомый угол опирается на дугу KST. Проведем окружность с центром в точке E и радиусом EM, $\Rightarrow EM = ER$ - Проводя аналогичные построения, получим, что $ER = RM$.

$\Rightarrow \Delta REM$ - равносторонний.

$\Rightarrow \angle DME = 60^\circ$.

Ответ: $\angle DME = 60^\circ$.