Шифр:

А – 14

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
Математика
2017/2018
Ленинградская область

Район Волховский

Школа Волховская городская гимназия №3 имени Героя Советского Союза Александра Лукьянова

Класс 9

ФИО Мельник Денис Александрович

№6

6	7	8	9	10	Σ
7	7	X	3	1	18

Чистовик А-14

Найдем минимальное количество цифр в подобном натуральном числе. Очевидно, что для того, чтобы цифр было как можно меньше, „девяток" должно быть как можно больше. Разделим 2018 на 9 с остатком: 2018 : 9 = 224 (ост. 2)

$$\begin{array}{r|l} 2018 & 9 \\ -18 & 224 \\ 21 & \\ -18 & \\ 38 & \\ -36 & \\ 2 & \end{array}$$

Значит, полученное число должно состоять из 224 „девяток" и „двойки". Такое число минимальное, если цифры упорядочены по неубыванию. Это число $2\underbrace{99\ldots9}_{224\text{ шт.}}$, значит это 1-е число в последовательности. Чтобы получить следующее число, нужно „перекинуть единицу" с 1-й из „девяток" на „двойку", значит следующее число должно состоять из „тройки", „восьмёрки" и 223 „девяток", минимальное такое число: $38\underbrace{99\ldots9}_{223\text{ шт.}}$, следующие числа будем получать, сдвигая „восьмёрку" на 1 вправо, т.е., 3-е число: $398\underbrace{99\ldots9}_{222\text{шт.}}$ и т.д.,

Таким же образом получим 225-е число, это: $3\underbrace{99\ldots}_{223\text{шт.}}98$

Ответ: $3\underbrace{99\ldots9}_{223\text{шт.}}8$

№ 7

Обозначим: К — красные фишки, З — зелёные фишки, С — синие фишки

По условию, менять можно стоящих рядом К и С, С и З. Чтобы решить задачу, нужно, чтобы м/у К и К, З и З, С и С не оставалось „пустых промежутков". Из условия о заменах следует, что „пустой промежуток" К—К можно заполнить только С и „пустой промежуток" З—З можно заполнить только С (на самом деле, их можно заполнить К и З соответственно, но это нам не подходит, т.к. в таком случае появится ещё один

№7 (продолжение) Чистовик А-14

меньший „пустой промежуток"),
значит, нам нужно заполнить
все „пустые промежутки" К-К и З-З
С, ~~(„пустые промежутки" С-С заполнятся в таком случае сами)~~ Посчитаем кол-во „пустых промежутков" К-К и З-З, которое было изначально, оно равно
$K-1+З-1=30+20-2=48$, чтобы
их заполнить, нужно как минимум 48 С, но
у нас всего 40 С, значит
это невозможно

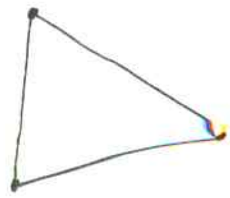
Ответ: нельзя

№10

Т.к. детей разделили на
33 группы, в которых
каждый дружит с каждым,
то пар друзей минимум
$\frac{3\cdot2}{2}$ (в каждой группе) $\cdot$ 33 (кол-во групп) $= 99$

Представим это всё в виде графа:

1 группа после „распада":

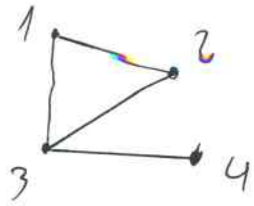


Назовем граф защищенным, если при удалении любой вершины в нем остается цикл (а нам нужны именно циклы по 3-м вершинам)

Сейчас граф 1 группы незащищенный, т.к. если удалить любую вершину, то цикл исчезнет, значит должно быть минимум 4 вершины в каждой группе изначально ~~(одна и та же верш~~ (один и тот же ребёнок может „быть вершиной" в нескольких группах), теперь приведём примеры графов из 4-х вершин и постараемся найти защищенный с минимальным количеством рёбер

— не защищенный, т.к. при удалении любой вершины цикл исчезнет

№10 (продолжение)   Чистовик А-14



— не защищенный, при удалении вершины 3 граф „разваливается“

Заметим, что нам нужен после удаления вершины граф, в котором будут 3 вершины и 3 ребра

Заметим, что при удалении вершины количество рёбер уменьшается на степень этой вершины, значит нам невыгоднее всего удалять вершину с наибольшей степенью вершины, степень каждой вершины в нужном нам графе равна 2, значит мы удалим как минимум 2 ребра, значит в изначальном графе не могло быть 4 ребра, их минимум 5

Но если будет 5 ~~ве~~ рёбер, то будет хотя бы одна вершина со степенью 3, т.к. если 4 вершины со степенью 2, то

рёбер максимум 4, значит после удаления этой вершины останется 2 ребра, а это нас не устраивает, значит рёбер в защищённом графе из 4 вершин 6 (это максимум для 4 вершин).
Нарисуем такой граф:

видно, что он защищённый, т.к. при удалении любой из вершин остается 3 ребра (т.к. степень каждой вершины 3, а рёбер 6) и эти 3 ребра образуют цикл по оставшимся 3 вершинам (т.к. 3 ребра — это максимум для 3 вершин). Этот граф для одной группы, а всего ~~групп~~ 33, мы будем складывать только количество рёбер, т.к один и тот же ребёнок может встретиться в нескольких группах

Чистовик А − 14

№10 (продолжение

Значит получается 33·6 ребер, значит ребер 198 и пар

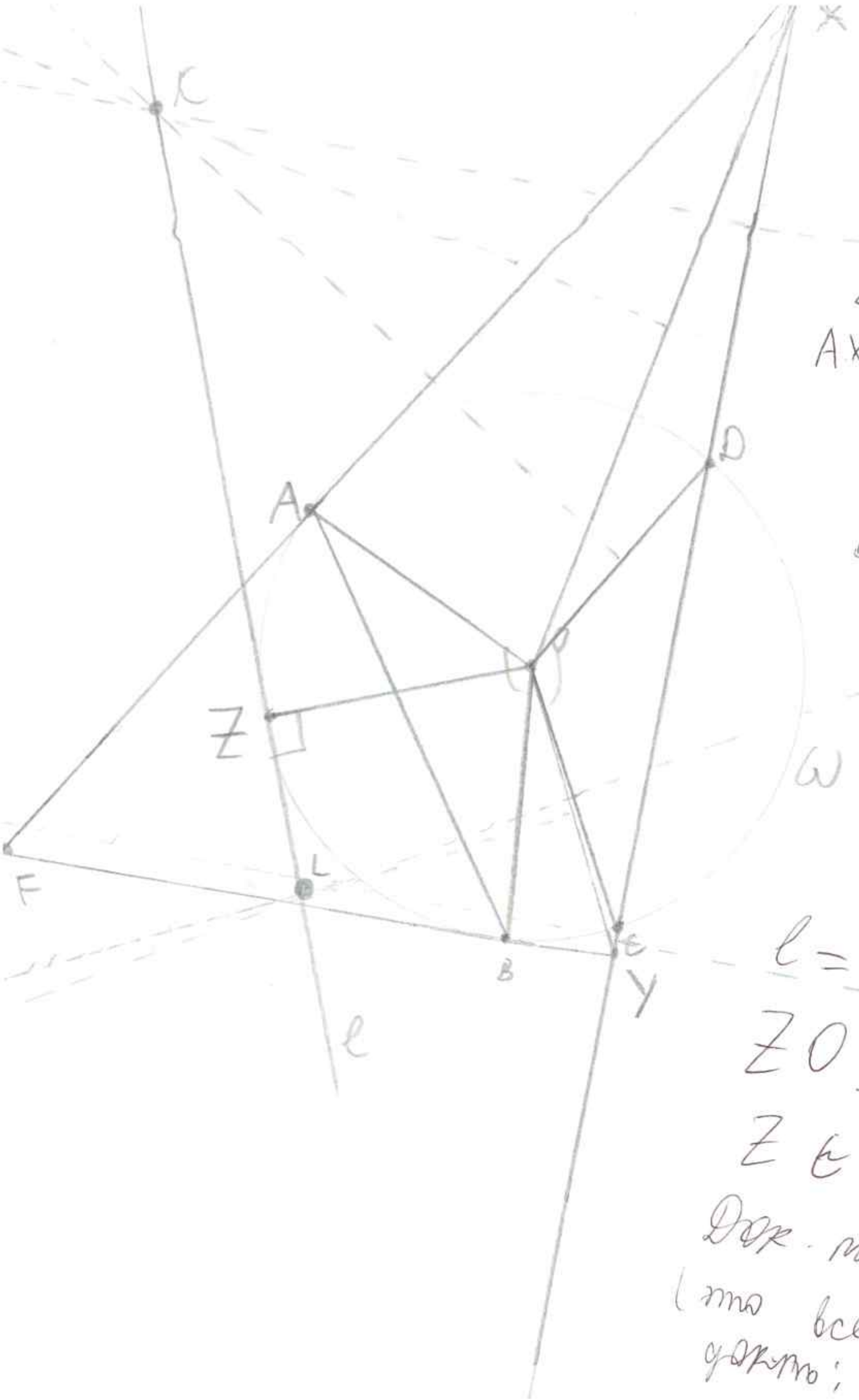
$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}33\\ 6\end{array} \\ \hline 198 \end{array}$$

дружащих друзей тоже 198. Приведем пример:
Пусть 99 детей дружат 33 группами по 3 человека, где каждый дружит с каждым, а 100-й ребёнок дружит со всеми остальными 99

Ответ: 198

№9

→



Дано: Окр. ω,
AB, DC – хорды,
∠AOB = ∠COD = 120°
AX – кас., AX ∩ DC = X
Окр. (K; KX) – опис. около △ODX,
BY – кас. к окр. ω,
BY ∩ DC = Y,
AX ∩ BY = F,
Окр. (L; LY) – опис. около △COY,
l = LK – пр.,
ZO ⊥ l,
Z ∈ l

Док. то: l – кас.
(это все равно, что док-ть: ZO – радиус)

Док-во:

1. Рассм. △AOB и △DOY, у них:

1) AO = OD (как радиусы)

2) OB = OC (как радиусы)

3) ∠AOB = ∠COD (усл.)

Зн. △AOB = △DOY (призн. рав. (△): по 2 ст. и (∠) м/у ними)

Чистовик А - 14

№ ~~10~~ 9 (продолжение)

2. $FA = FB$ так как провед. из 1-й точки

3. $\angle AOB$ — центр., опир. на $\smile AB$, $\angle AOB = 120^\circ$ (усл.), зн. $\smile AB = 120^\circ$

4. $\smile AB + \smile BDA = 360^\circ$

$\smile BDA = 240^\circ$

5. $\angle AFB = \dfrac{\smile BDA - \smile AB}{2} = \dfrac{240^\circ - 120^\circ}{2} = 60^\circ$

6. Рассм. $\triangle AFB$, $FA = FB$ (док.), зн. $\angle FAB = \angle FBA$ (св(-о) равнобедр. (Δ)), зн. $\angle FAB = \angle FBA = \angle AFB = 60^\circ$, зн. $\triangle AFB$ равност., зн $FA = AB = FB$ (опр.), зн. $FA = AB = FB = DC$

то $AD \parallel BC$ (опр. пар-ма),
зн. $FG = AH$ и $FG \parallel BC$,
но $AH = BM$ (док.), зн.
$FG = BM$ и $FG \parallel BM$.

7. Рассм. окр. $(F; FE)$,
$\angle ABE$ – впис., т.к. опир. на диаметр AE и
$\angle ABE = 90^\circ$, $\angle AHE$ – впис., т.к. опир. на диаметр AE и $\angle AHE = 90^\circ$, зн. BF и FH – ~~диаметры~~ радиусы,
зн. $BF = FH = FE = FA$

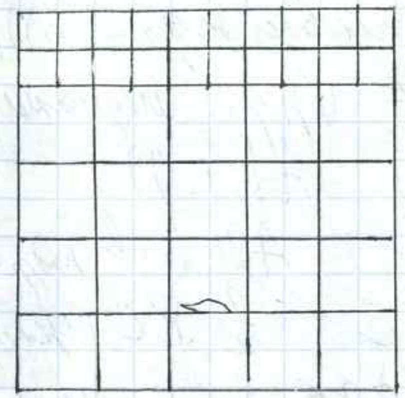
8. Рассм. 4-хуг-к $BFGM$,
$FG = BM$ (док.), $FG \parallel BM$ (док.),
зн. $BFGM$ – пар-м (призн.), зн. $BF = GM$ (св. пар-ма), $GM = FE$, но

Чистовик

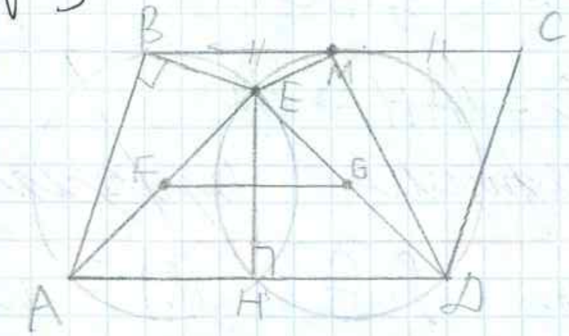
A-14

1	2	3	4	5	Σ
7	0	7	0	X	14

№1



№3



Дано: $ABCD$ – пар-м,
(.) E, $AE = DE$,
$\angle ABE = 90^\circ$,
(.) $M \in BC$,
$BM = MC$
Найти: $\angle DME$

Решение:

1. Рассм. $\triangle AED$ – равнобедр. (опр.), т.к. $AE = ED$ (усл.), проведем выс. EH, то EH – медиана и биссектр. (св. медианы равнобедр. ($\triangle$)), зн. $AH = HD = \frac{AD}{2}$ (опр. медианы)

2. Рассм. пар-м $ABCD$, $AB = CD$, $BC = AD$ (св. пар-ма), но $BM = MC = \frac{1}{2} BC$ (усл.), $AH = HD = \frac{1}{2} AD$ (док.), зн. $BM = MC = \frac{1}{2} BC$

$AH = HD = \frac{1}{2} BC$

зн. $BM = MC = AH = HD$

3. Отметим середины AE и DE (.) F и (.) G соотв. и построим на AE и DE как на диаметрах окр. (F; FE) и окр. (G; GE)

4. Рассм. $\triangle AED$, $AE = ED$ (усл.), зн. $\angle EAD = \angle EDA$ (св. равнобедр. ($\triangle$))

5. Т.к. $EG = GD$ (постр.), $AH = HD$ (док.), то $EA \parallel GH$ (следств. из т. Фал.), зн. GH – ср. лин. (~~опр.~~ опред.), зн. $GH = \frac{1}{2} AE$ (св. ср. лин.), зн. $GH = FE$, $GH = GD$, зн. $\triangle HGD$ – равнобедр. (опр.), зн. $\angle GHD = \angle GDH$ (св. равнобедр. ($\triangle$))

6. FG – соед. середины AE и ED, зн. FG – ср. лин. (опр.) зн. $FG = \frac{1}{2} AD$ и $FG \parallel AD$ (св. ср. лин.),

№3 (продолжение) Чистовик А-14

8. (продолжение) $FE = GE$ (постр.), зн. $GM = GE$

9. Рассм. окр. $(G; GE)$, GE - радиус, но $GM = GE$, зн. GM - тоже радиус, зн. $(\cdot) M \in$ окр. $(G; GE)$, зн. $\angle EMD$ - впис. (окр.), опир. на диаметр ED, зн $\angle EMD = 90°$

Ответ: $90°$

№4

Чтобы выполнялось 1-е условие, нужно, чтобы у каждого ученика было хотя бы $N-10$ сортов

Чтобы выполнялось 2е условие, нужно, чтобы в комбинациях, полученных у учеников ~~по 2~~ один и тот же сорт встречался хотя бы 2 раза и в комбинациях с разными сортами, но ровно 2 раза в таком случае быть не может, каждый сорт должен встретиться хотя бы $N-10$ раз

Значит, сортов не может быть больше, чем учеников, значит $N \leq 1000$

Для $N = 1000$ возможно выполнение этих условий, Пусть у первого набор 1, 2, 3 ... 990, у 2-ого 2, 3, 4 ... 991, и т.д., у 1000-ого 1000, 1, 2, ... 989, тогда все условия будут выполнены

№2

Да, обязательно, т.к. условие в другом случае выполняться не будет