Шифр: А-7

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2017/2018
Ленинградская область

Район г. Сосновый Бор

Школа МБОУ „СОШ №2 с УИАЯ"

Класс 9В

ФИО Мекрюков Валентин Андреевич

Чистовик.

Олимпиадная работа. №6.

6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	0	1	15

А-7

Лист №1.

Наименьшее число, сумма цифр которого равна 2018, содержит девяток $2018 : 9 = 224$ (ост. 2), т.е. 224 девятки и 2 на первом месте, т.е. это число $2\underbrace{999\ldots999}_{224\text{ раза}}$, оно 225-значное.

Следующее число с той же суммой цифр, имеет, значит, 3 на первом месте и восьмёрку на месте одной из девяток. Наименьшее возможное ~~второе число~~ 1+1 (второе) число будет иметь восьмёрку на 2 месте, ~~т.е. иначе~~ $\cancel{9}\,8\underbrace{999\ldots999}_{224\,3\,р.} < 9\ldots8\ldots9$, 1+2 (третье) число будет иметь восьмёрку на 3 месте и т.д., так как $9\ldots8\ldots9 < 9\ldots8\ldots9$, если восьмёрка ~~v~~ имеет ~~занимает~~ больший разряд (ведь $8 < 9$). Значит, 1+224 (225-е) число будет иметь восьмёрку на 225 месте, т.е. в самом конце 225-значного числа. Таким образом, 225-е число – $3\underbrace{999\ldots999}_{223\text{ раза}}8$, и оно и есть искомое.

Ответ: $3\underbrace{999\ldots999}_{223\text{ раза}}8$.

№7.

Мы не можем менять местами стоящие рядом зелёную и красную фишки. Значит, ~~зел~~ зелёные и красные фишки могут стоять рядом ~~перескочиться~~ только в двух местах – в изначальном ~~начале круга~~ положении на границе зелёных и красных и в противоположном ему положении на месте бывших синих. Всего красных и зелёных фишек $30 + 20 = 50$, а, значит, чтобы рядом стояли только фишки разных цветов, нужно заполнить синими фишками $50 - 2 = 48$ промежутков между красными или зелёными фишками одного цвета. Но синих фишек всего 40. Значит, 8 промежутков не будут заполнены – в рядом будут стоять фишки одного цвета. Значит, добиться искомого расположения путём перестановки только синих с красными и синих с зелёными фишками невозможно.

Ответ: нет, нельзя.

№8 10.

Пусть ребёнок А дружит со всеми. Если выделить А, то можно создать

33 группы по 3 дружеских пары, значит, в этом случае минимальное количество дружеских пар – $33 \cdot 3 = 99$. Если выделить другого ребёнка, то на его место можно поставить A и условие снова будет выполнено. Всего для этого случая имеем $99 + 99$ (для A) $= 198$ дружеских пар, ~~т.к. мы~~ считаем, что A дружит с 99 оставшимися детьми.

Докажем, что 198 пар – минимальное количество пар, то есть меньше 198 пар быть не может. Для этого ~~разобьём~~ выделим снова ~~какого~~ некоего ученика B. Оставшиеся дети образуют, как минимум 99 дружеских пар. Если ученик B имеет менее 99 дружеских связей (обозн. её M), то при выделении другого ученика из одной из ~~тех~~ троек, в которой он не имеет связи, ему придётся искать тройку N, в которой он бы имел 2 связи. Тогда ученик из ~~этой~~ тройки N, „потеснённый" учеником B, должен искать тройку, где бы он имел связи. Значит, ~~то~~ если он такую тройку найдёт, он имел не 2, а 4 или более связей, и общее количество связей в случае выделения B – не 99, а 101 и более, т.е. больше, чем в описанном выше случае, у ученика B же связей тогда ~~на~~ 2 ~~или меньше~~ меньше на кол-во доп. связей, если все связи использованы. Значит, описанный случай демонстрирует минимальное кол-во дружеских пар и их минимальное число, таким образом – 198.

Ответ: 198 пар дружащих детей.

№ 8.

$$q = \underbrace{n^0 + n^0 + n^0 + \ldots + n^0}_{q\ \text{раз}}$$

Тогда $q + p = \underbrace{n^0 + \ldots + n^0}_{q - r\ \text{раз}} + (p + r)$.

~~Значит, $p + r = n^k$, причём $r \le q$.~~

Значит, $p + r = \underbrace{n^{k_1} + n^{k_2} \ldots}_{r\ \text{раз}}$. Мы получим ту же задачу. Значит, можно уменьшать q (или r) до единицы. Рассмотрим этот вариант:

$q + p = \underbrace{n^0 + \ldots + n^0}_{(q-1)\ \text{раз}} + (p + 1)$, где $p + 1 = n^k = (n^b)^{k/b}$ (если k – не простое).

~~Докажем, что k – число простое, ведь если это так, то n единственно. Если k имеет ≥ 2 простых множителя, то n существует 2. Но т.к. за p в условии разнозначных то можно получить 2 значения для $(p+1)$, и, значит, 2 значения для n (которые могут совпадать или не совпадать).~~

Докажем, что k – простое число (или единица) (при $k = 1$ и только ей n единственно). Ведь если k – простое, то для n существуют 2 значения – одно при $k_1 = 1$, $n_1 = n^k$, второе – при $k_2 = k$, $n_2 = n$, что и требуется доказать. Пусть k – не простое. Значит, есть делитель b такой, что $k \vdots b$. Тогда $k = bm$, $b \ne 1$, $m \ne 1$.

$n^{bm} = n$, т.к. из уравнений $m^2 - km + k = 0$ или $b^2 - kb + k = 0$ следует, что

$= 2$ (или $k \ne m = 2$). Но $n^{2m} - 1 = (n^{m} - 1)(n^{m} + 1) \ne p$, т.к. p – простое. Значит, k – простое, и наличие не более 2^n значений доказано.

№ 9.

~~Если~~ Дано: окр. ω, центр O.

AB, CD – хорды

$\angle AOB = \angle COD = 120^\circ$

AX – касат.

BY – касат.

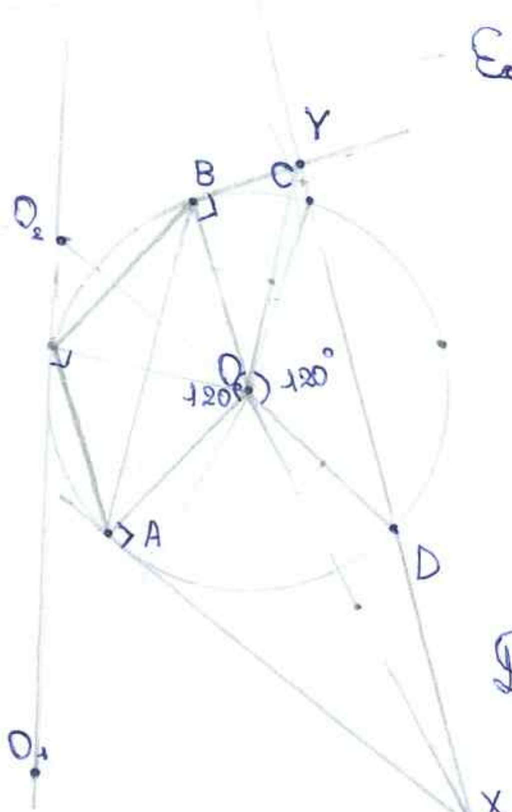
$X \in$ луч CD

$Y \in$ луч DC

окр. ω_1, ω_2 – опис. около $\triangle DOX$ и $\triangle COY$

$O_1O_2 = \ell$

Док-ть: ℓ – кас. к. ω.



Док-во.

1) ~~Необходимо~~ Необходимо доказать, что $O_1O_2 \perp OL$, где L – точка пересечения ℓ с ω.

~~2) Рассм. $\triangle O_1O_2D$~~ 2) Если OL – биссектриса угла BOA, то ~~угол~~ перп-ность доказана. Значит, нужно в этом случае доказать, что $\angle BOL = \angle AOL = 60^\circ$, т.е. что $\triangle BOL$ и $\triangle AOL$ – равносторонние.

(Это, в частности, ~~возможно~~ имеется, когда $AB \parallel CD$; тогда окр-ти ω_1 и ω_2 равны и $O_1O_2 \parallel AB$; но это только 1 случай).

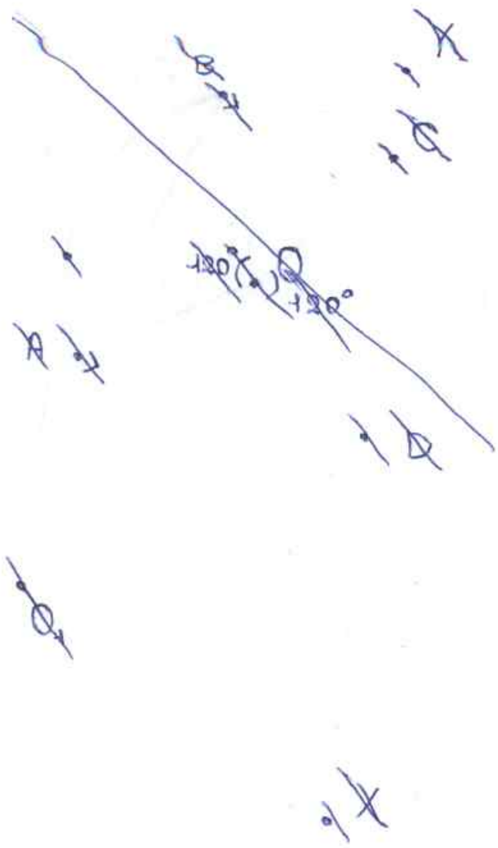
3) Если для $AB \parallel CD$ утверждение верно, то оно верно и для $AB \nparallel CD$, т.к. $\angle OO_1D$ увеличивается при движении точки D по окружности вверх настолько, насколько $\angle OO_2D$ уменьшается, и тогда прямая O_1O_2 сохраняет своё положение.

Олимпиадная работа.

№ 9.

А - 7

Лист. № 2.



1	2	3	4	5	$\sum$
6	0	0	0	0	6

A - 7

Олимпиадная работа.

№ 12.

Если среди пяти чисел есть 4 одинаковых, то сумма трёх из них делится на оставшееся: $3a \vdots b$, при этом $2a + b \vdots a$. Значит, $b \vdots a$ и $b = na$, где n - ~~любое~~ натур. число. Если $n = 1$, то все числа одинаковы, значит, если $a \neq b$, то $n = 3$. Пусть теперь только 3 одинаковых числа и равны a. Тогда 2 оставшихся числа - это $b = ka$ и $c = ta$, ~~т. к. иначе $3a \vdots$~~ иначе $2a + b \not\vdots a$ и $2a + c \not\vdots a$.

В таком случае верны необходимые делимости:

$$\begin{cases} 3a \vdots ka \\ 3a \vdots ta \\ 2a + ka \vdots ta \\ 2a + ta \vdots ka \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 3 \vdots k \\ 3 \vdots t \\ 2 + k \vdots t \\ 2 + t \vdots k \end{cases}$$

k и t по условию - натуральные числа, значит, либо одно из них равно 1, либо $k = t = 3$, т. к.

A - 7 иначе $3 \not\vdots k$ или $3 \not\vdots b$.

Но $2a + ka \vdots ba$, а $2a + 3a \not\vdots 3a$. Значит, хотя бы ни b одно из коэффициентов (например, k) равен 1 a, значит, $ab = ka = 1a = a$, т.е. одинаковы 4 числа.

Значит, 4 равных числа найдутся обязательно, если равных 3.

Если равных всего 2, то получатся делимости:

$2 + k \vdots b$ $\quad$ $2 + k \vdots m$

$2 + b \vdots k$ $\quad$ $2 + b \vdots m$

$2 + m \vdots b$ $\quad$ $2 + m \vdots k$

Пусть $b \geq m$. Тогда $b \vdots m$. Значит, и $2 \vdots m$, т.е. либо $m = 1$ и имеем предыдущий случай, либо $m = 2$. Но если $m = 2$, то $4 \vdots k$ и $4 \vdots b$, зн., если k и b не равны 1, или $k = b = 2$, или $k = 2$, $b = 4$, или $k = b = 4$. При коэффициенте 2 при всех числах ~~3a~~ 2a ~~2 + k ⋮ 2a + b ⋮ a все делимости выполняются. Значит, например, случай 1, 1, 2, 2, 2, удовлетворяет условию, т.к. 4 ⋮~~ $a + 2a + 2a \not\vdots 2a$.

Если один коэф. – 4, то $a + 2a + 2a \not\vdots 4a$ или

A-7

№4.

Если ~~брать~~ только первое условие, то максимальное N –

Если ~~брать~~ только 2 условие, то максимальное N – 2000.

$a + 2a + 4a \vdots 4a$. Значит, ~~од~~ k, b или m = 1 из имеет пред. случай.

Ответ: ~~обязательно~~.

A-7

№ ~~4~~ 5.

1) $(x-y)(y-z)(x-z) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (доказать).

$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

2) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 1 - z^2$, то же для x и z, y и z.

Значит, $x^2 + y^2 \leq 1$, $x^2 + z^2 \leq 1$, $y^2 + z^2 \leq 1$.

3) $(x-y)^2(y-z)^2(x-z)^2 \leq \frac{1}{2}$

При $x^2 + y^2$, $y^2 + z^2$, $x^2 + z^2$ – максимальных.

$(1 - 2xy)(1 - 2yz)(1 - 2xz) \leq \frac{1}{2}$

$8x^2y^2z^2 + 4xyz(+x+y+z) - 2xy - 2yz + 2xz + 1 \leq \frac{1}{2}$

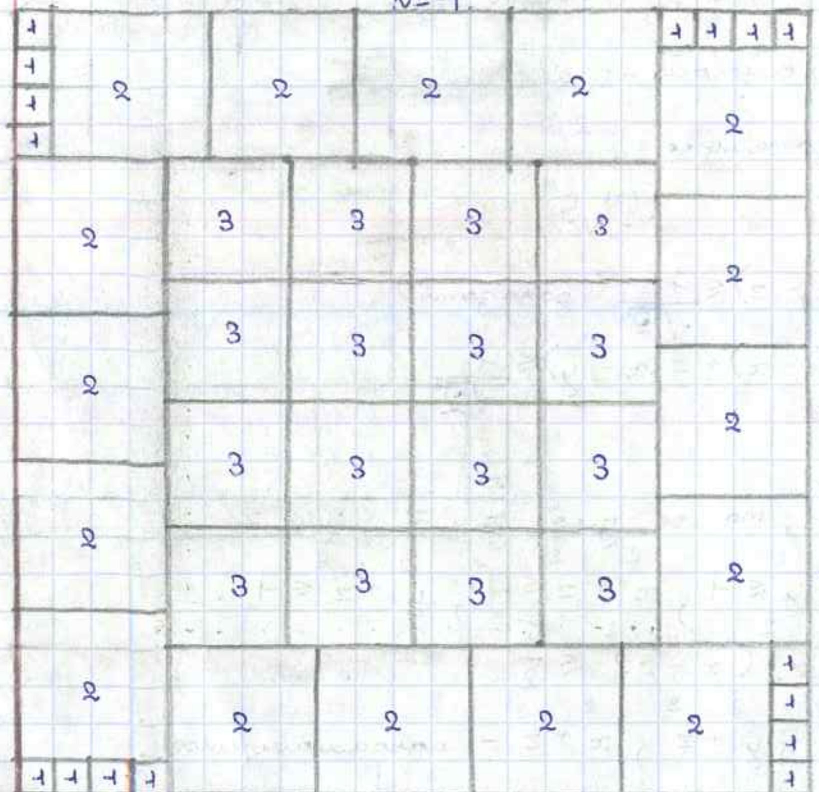
$(4xyz + (x - y + z))^2 - (x^2 + y^2 + z^2) + 1 \leq 1 + 2xy + 2yz - 2xz$

$(4xyz + x - y + z)^2 \leq \cancel{1}(x - y + z)^2$, т.к., квадраты равны

~~0, что $4xyz < 0$~~ доказано для максимальных, т.к., при меньших значениях ~~не~~ квадраты меньше нуля. Из этого следует, что исходное выражение равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$ при максимальных значениях суммы квадратов и меньше при меньших значениях.

A-7

№1



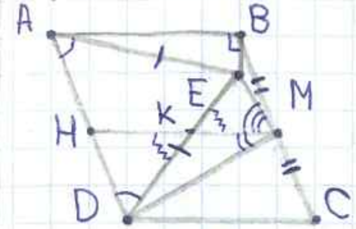
(рис. 1; ~~(1:8)~~ 2
масштаб 1 к 4.

Рассмотрим построение, которое представлено на рисунке, обозначенном как рис. 1.

Если увеличить квадрат в ~~1/8~~ 4/8 раза, ~~то~~ или в 1 разделить каждую клетку на ~~64~~ 16 кл. клеток, это построение совпадёт с границами клеток. Всего в квадрате №1 84 кл. со стороной ~~168~~ клеток, тогда 16 квадратов со стороной 8 клеток, 16 №2 со стороной ~~64~~ 32+16 кл. клеток и 16 №3 со стороной ~~26~~ 13 клеток.

№4.3.

Дано: ABCD - парал.



AE = DE

$\angle ABE = 90^\circ$

$M \in BC$, $BM = MC$

Найти: $\angle DME$.

Решение.

1) Рассм. $\triangle AED$. $AE = DE$, зн., $\angle A = \angle D$.

2) Доп. постр. $MH \parallel DC$.

3) $\angle DME = \angle DMH + \angle EMH$.

4) $\angle DMH = \angle MDC$ ~~= 180°~~ -

5) $\angle EMH = 180^\circ - \angle DEM - \angle HKD$, где $K = DE \cap MH$.

$\angle EMH = 180^\circ - \angle DEM - (180^\circ - \angle D - \angle C)$, т.к.

HMCD - параллелограмм. ~~$\angle D + \angle C = 180^\circ$, значит,~~

~~$\angle HKD = 0^\circ$ и $D = H$~~.

$\angle EMH = \angle D + \angle C - \angle DEM$.

6) $\angle DAB = \angle C = \angle A + \angle BAE = \angle D + \angle BAE$

$\angle EMH = 2\angle D + \angle BAE - \angle DEM = 2\angle D + 90^\circ -$

$-(\angle BEA + \angle DEM)$.

$\angle AED = 180^\circ - 2\angle D$, зн., $\angle BEA + \angle DEM =$

$= 360^\circ - \angle AED - \angle BEM = 180^\circ + 2\angle D - \angle BEM$.

A-7