Шифр: А-26

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
Математика
2017/2018
Ленинградская область

Район Всеволожский

Школа Сертоловская №1

Класс 9

ФИО Лукьянов Александр Сергеевич

6	7	8	9	10	Σ
7	7	X	X	1	15

Олимпиада.

A-26.

№ 9.7. Чистовик

1) В условии задачи сказано, что можно переставлять синюю и зелёную фишки или синюю и красную. Это означает, что зелёная и красная фишки не могут быть переставлены за ход.

2) Так как все фишки одного цвета изначально идут подряд, то, исходя из п. 1, множества красных и зелёных фишек могут только столкнуться в двух местах, но не пересечься.

3) Значит, между всеми зелёными и между всеми красными фишками должны стоять синие. Но это <u>невозможно</u>, так как промежутков между красными фишками ~~30-1=29~~ 30-1=29, а между ~~синими~~ зелёными — 20-1=19. ~~29+19=58 => 58 синих фишек~~

29+19=48, 48 синих фишек понадобится, но у нас только 40. Не хватает.

№ 9.6.

1) Найдём минимальное число в этом ряде.

Оно будет содержать в себе максимально возможное кол-во цифр „9". Для этого найдём это кол-во:

$\boxed{2018 : 9 = 224 (2 \text{ ост.})}$

Это говорит о том, что в полученном числе будет 224 цифры „9", а также цифры, сумма которых равна 2.

Очевидно, что минимальное число с такими данными — это $2\underbrace{999\ldots999}_{224 \text{ цифры}}$.

2) Рассмотрим ряд дальше:

Так как кроме „2" все остальные цифры „9", приходится увеличить цифру самого старшего разряда на 1, при этом из „9", стоящей в самом старшем разряде вычтем 1:

2 число — $38\underbrace{999\ldots999}_{223 \text{ цифры}}$.

Третьим числом будет являться $398\underbrace{9\ldots9}_{222 \text{ цифры}}$.

По аналогии:

4 число — $3998\underbrace{9\ldots9}_{221 \text{ цифра}}$.

...

224 число — $3\underbrace{999\ldots999}_{222 \text{ цифры}}89$.

225 число — $3\underbrace{999\ldots999}_{223 \text{ цифры}}8$

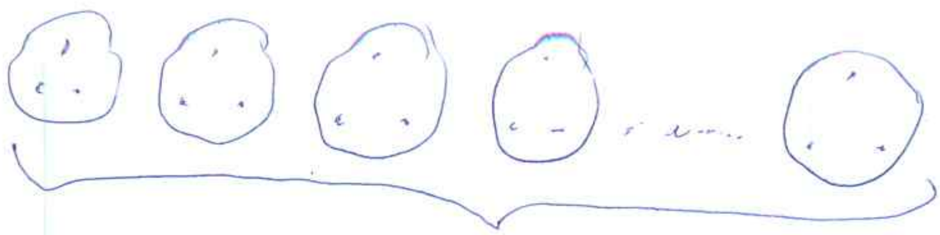
Ответ: $3\underbrace{999\ldots999}_{223 \text{ цифры}}8$

№9.10.

Пусть всё так и произошло. Одного человека выделили, остальные 99 разбили на 33 группы по 3 человека.

Чистовик А-26.

● — выделенный



33 группы.

Значит уже каждый имеет 2 друзей.

Но в условии задачи сказано, что выделенным может быть любой. => из группы кто-то должен выйти и кто-то войти.

Задействуем при этом минимальное кол-во лиц:

Пусть 1 человек является другом для всех остальных. Он будет являться первым выделенным.

Тогда при выделении нового человека „друг для всех" заменяет его в группе, откуда тот вышел. Таким образом группы практически не меняются.

Подсчитаем минимальное кол-во пар:

В одной группе 3 пары. Всего групп 33. А также „друг для всех" образует ещё 99 пар.

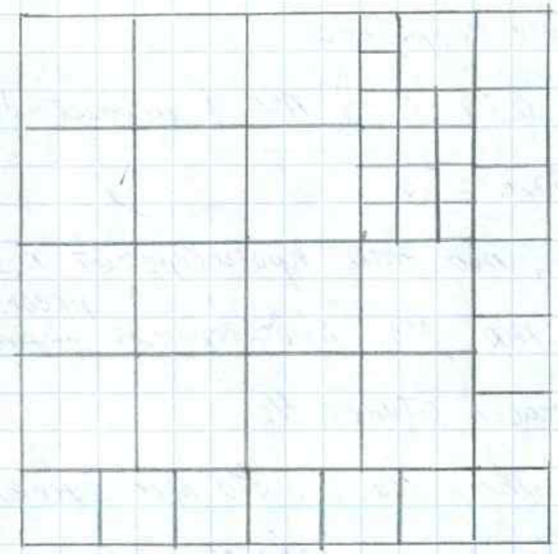
$99 + 3 \cdot 33 = 198$ (пар)

Ответ: миним. кол-во пар — 198.

A-26

1	2	3	4	5	Σ
7	0	x	0	y	7

№1.



№2.

Предположим, что будет достаточно 3 равных чисел. Назовём их $a, a, a, в, c$.

По условию сказано, что сумма любых 3-х чисел делится на каждое из остальных.

Тогда:

1) $3a \vdots b$

2) $3a \vdots c$

3) $2a+b \vdots a \Rightarrow b \vdots a$

4) $2a+c \vdots a \Rightarrow c \vdots a$.

5) $2a+b \vdots c$

Рассмотрим это подробнее:

Так как $b \vdots a$ (п.3), то b может быть равно a; $2a$; $3a$; $4a$ и т.д.

Если $b > 3a$, то это противоречит п.1

Если $b = a$, то это противоречит ~~условию~~ предположению, т.к. равных чисел станет 4.

Если $b = 2a$, то $4a \vdots c$. Но мы знаем, что $3a \vdots c$. Исходя из свойств делимости $a \vdots c$. Но так как $c \vdots a$, то $a = c$. А это противоречит предположению.

Если $b = 3a$, то $5a \vdots c$. Но мы знаем, что $3a \vdots c$. Исходя из св. делимости $a \vdots c$. Но так как $c \vdots a$, то $a = c$. А это противоречит предположению.

Других b быть не может $\Rightarrow$ наше предположение неверно.

Ответ: да, обязательно

9.4.

Так как сортов конфет было N, а для любых 11 сортов любой ученик получил хотя бы 1 из них, то по принципу Дирихле можно сказать, что 1 ученик получил $N-10$ сортов.

Известно, что для любых 2-х сортов найдётся ученик, имеющий ровно 1 из этих сортов.

Всего таких пар будет $N(N-1)$.

Среди недостающих 10 конфет у ученика должна быть 1 из пары.

$N(N-1)$ должно быть менее 1000, так как иначе не хватит учеников.

$N(N-1) \leq 1000$.

$N \in (-\infty; 32]$. $N_{max} = 32$. Ответ: 32.