Шифр: В-22

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по МАТЕМАТИКЕ
2017/2018
Ленинградская область

Район Тосненский

Школа МБОУ СОШ №3 г. Никольское.

Класс 10.

ФИО Миллер Вадим Андреевич.

В-22.

1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	X	X	14

10.2.

Заметим что в этой игре у каждого числа есть лишь одно число, отличающееся от данного на 1009 (в большую или меньшую сторону).

если $1 \leq x \leq 1009$, то $x+1009$. (1)

$1010 \leq x \leq 2018$, то $x-1009$.

Иначе, если бы сущ. $x+1009$ и $x-1009$ у x, то разница между этими числами $(x+1009)-(x-1009)=2018$, в то время, как в игре макс. разность $2018-1=2017$.

Петя написал число k.

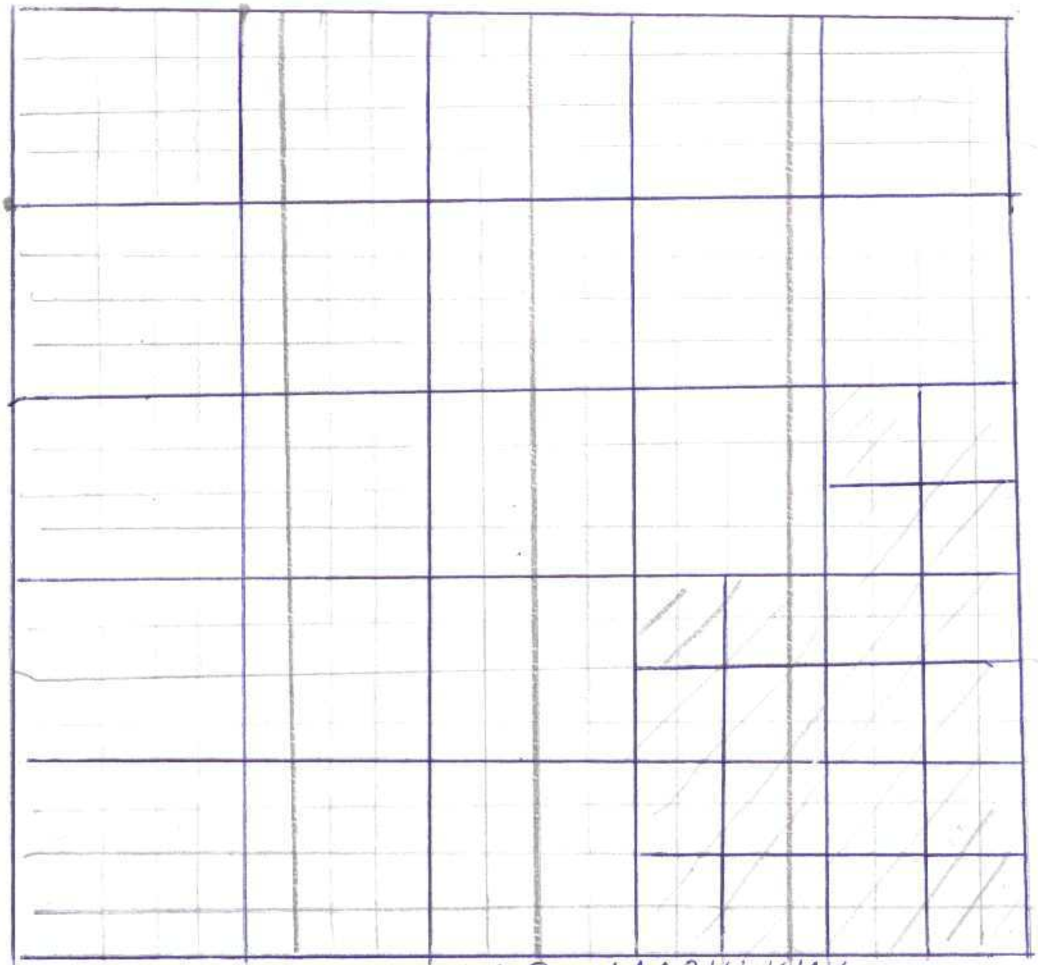
Чтобы выиграть, Вася должен написат $k \pm 1009$ (см. усл. (1))

Петя не может победить на этом ходе, т.к. не существует x, отличающегося от k или $k \pm 1009$ на 1009 кроме самих этих чисел. Так же он ~~нем~~ не может поставить $x = \frac{k + k \pm 1009}{2} = k \pm 504{,}5$, т.к. $k \pm 504{,}5 \notin \mathbb{N}$. Тогда он поставит x в один из интервалов: $[1; k)$, $(k; k+1009)$, $(k+1009; 2018]$ / $[1; k-1009)$, $(k-1009; k)$, $(k; 2018]$.

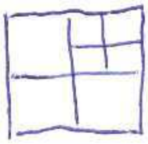
Причём очевидно, что x будет либо чётным, либо нечётным, как и одно из чисел k и $k \pm 1009$. Значит сумма x с одним из этих чисел будет делиться на 2, что говорит о наличии натурального среднего арифм., которое Вася может поставить следующим ходом и победить.

Ответ: у Васи.

10.1.



20 БОЛЬШИХ и 20 МАЛЕНЬКИХ.

(*) если же считать все (кроме большого) квадраты, т.е. и те, которые составлены из других, то рис. может быть таким:  4 б. и 4 м.

10.3. $x^5-y^3 \geqslant 2x$ $\quad x^5-x \geqslant y^3+x$. $\quad x(x^4-1) \geqslant y^3+x$

$x(x-1)(x+1)(x^2+1) \geqslant y^3+x$ $\quad \cancel{(x^3-x)(x+1)(x^2+1) \geqslant y^3+x}$

$x^3 > x(x-1)(x+1) = x^3-x$.

$(x^3-x)(x^2+1) \geqslant y^3+x$

$x^3(x^2+1) \geqslant y^3+x$.

$x^3(x^2+1) \geqslant y^3+x$

$$x^3 \geqslant \frac{y^3+x}{x^2+1}$$

$x^5+x^3 \geqslant y^3+x$

$x^5+x^3-x \geqslant y^3$

B-22.

6	7	8	9	10	Σ+
7	7	7	×	×	21

10.6. $\frac{0}{n}; \frac{1}{n-1}; \frac{2}{n-2}; \frac{3}{n-3}; \dots; \frac{n-1}{n-(n-1)}$.

Перевернём посл. и запишем все её члены так, как записан последний.

$$\frac{n-1}{n-(n-1)}; \frac{n-2}{n-(n-2)}; \frac{n-3}{n-(n-3)}; \dots; \frac{n-(n-1)}{n-(n-(n-1))}; \frac{n-n}{n-(n-n)}.$$

Раскрываем скобки в знаменателе и получаем:

$$\frac{n-1}{1}; \frac{n-2}{2}; \frac{n-3}{3}; \dots; \frac{n-(n-1)}{n-1}; \frac{n-n}{n}.$$

Теперь разделим каждый член на слагаемые.

$$\frac{n}{1}-1; \frac{n}{2}-1; \frac{n}{3}-1; \dots; \frac{n}{n-1}-1; \frac{n}{n}-1$$

Заметим, что посл. состоит из чисел вида $\frac{n}{k}-1$, где $k \in \mathbb{N}$ и $k \le n$.

$n \vdots d$ по усл. и $d \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $n = xd$, где $x \in \mathbb{N}$.

Зн. $d = \frac{n}{x}$ причём $x \le n$, т.к. $d \in \mathbb{N}$.

$d-1 \overset{\Downarrow}{=} \frac{n}{x}-1$, где $x \in \mathbb{N}$ и $x \le n$.

Мы видим, что это и есть формула $\frac{n}{k}-1$, которая задаёт нашу посл., просто переменная названа по-другому.

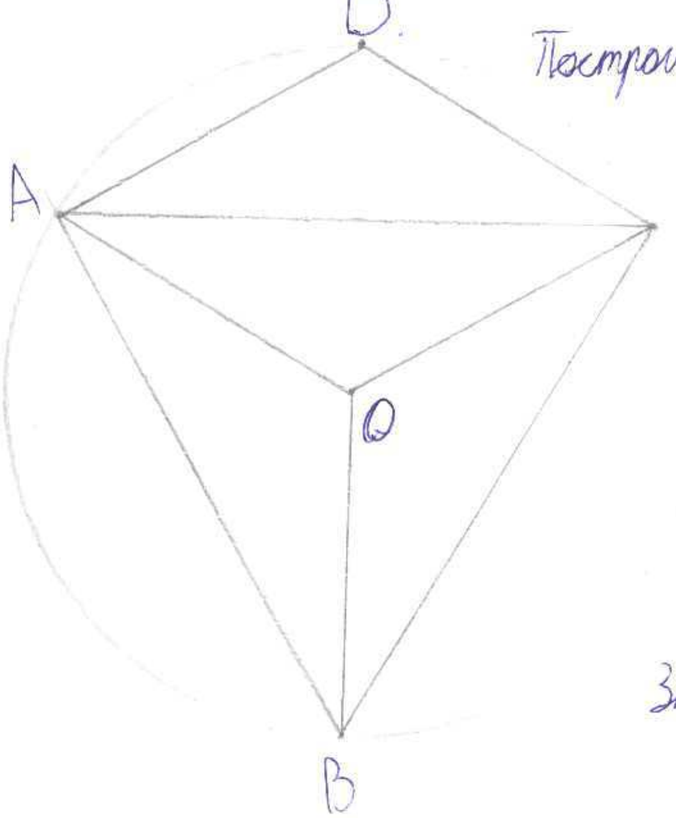
Зн. $d-1 = \frac{n}{k_0}-1$, где k_0 – одно из натур. чисел (одно из k) от одного (1) до n включительно, т.е. среди выписанных на доску дробей есть дробь, равная $d-1$.

ч.т.д.

1

10.7.

Построим равностор. треуг. $\triangle ABC$.



O – центр. опис. окр.

Построим D: $D \in \smile AC$ (меньшей).

$AD = DC$.

$\smile AC = 120^\circ$.

$\smile AD = \smile DC = \frac{\smile AC}{2} = 60^\circ$

$\angle DAC = \angle DCA = \frac{\smile AD}{2} = \frac{\smile DC}{2} = 30^\circ$

$OA = OC = OB$ (радиусы окруж.).

$AC = AB = BC$ (стороны равностор. треуг.).

Зн. $\triangle AOC = \triangle AOB = \triangle BOC$ (по трем сторонам).

Рассмотрим $\triangle ADC$ и $\triangle AOC$

AC – общая сторона.

$\angle OAC = \angle OCA = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ = \angle DAC = \angle DCA$.

Зн. $\triangle ADC = \triangle AOC$ (по стороне и прилежащим углам.).

Зн. $\triangle ADC = \triangle AOC = \triangle AOB = \triangle BOC$.

т.е. $ADCB$ – ~~треуг.~~, ~~что~~ выпуклый ~~многоуг.~~ четырехуг., сложенный из 4 равных треуг..

Параллельными могут быть только против. стороны.

Поэтому рассмотрим AD и BC; AB и DC.

$\angle ADC = 120^\circ$ $\angle BCD = 90^\circ$. $\angle BCD + \angle ADC > 180^\circ$ (односторонние,)

Зн. AD и BC не параллельны.

$\angle ADC = 120^\circ$ $\angle BAD = 90^\circ$ $\angle ADC + \angle BAD > 180^\circ$ (односторон.)

Зн. AB и DC не параллельны.

Т.е. утверждение, что у выпуклого четырехуг., сложенного из 4 равных треуг., ~~есть~~ обязательно есть параллельные стороны, неверно.

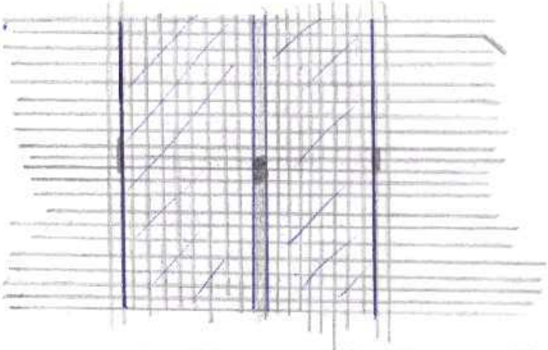
Ответ: нет.

B-22.

10.7.

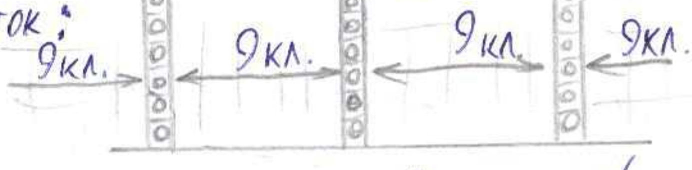
Полностью

Заполним произвольный столбец или строку гепардами. Очевидно что в таком случае они не будут друг друга бить. Для определённости будем считать, что мы заполнили столбец.
Также очевидно, что на расст. в 9 клеток вправо и влево от этого столбца нельзя ставить новых гепардов (гепарды столбца бьют полосу шириной в 9 клеток справа и слева от этого столбца).



- ГЕПАРДЫ (2 ШТ).
- КЛЕТКИ, В КОТОРЫЕ МОЖНО СТАВИТЬ НОВЫХ ГЕПАРДОВ.
- КЛЕТКИ, В КОТОРЫЕ НЕЛЬЗЯ СТАВИТЬ ГЕПАРДОВ, И ИХ ГРАНИЦЫ.

Теперь заполним гепардами столбцы на ~~расст~~ расст. 9 клеток от первого столбца, затем — на расст. 9 клеток от следующих двух столбцов, и так пока вся таблица не будет заполнена столбцами с гепардами, расст. между которыми — 9 клеток:



Таким образом в столбе шириной 10 кл у нас по-любому оказывается 1 заполненный гепардами столбик.
Тогда кол-во таких столбцов $K = \frac{1000}{10} = 100$.
Кол-во гепардов в таком столбце $n = 1000$
Кол-во всех гепардов $N = nK = 100 \cdot 1000 = 100\,000$.
Теперь докажем что более 100 000 не бьющих друг друга гепардов на доске располагаться не может.

2

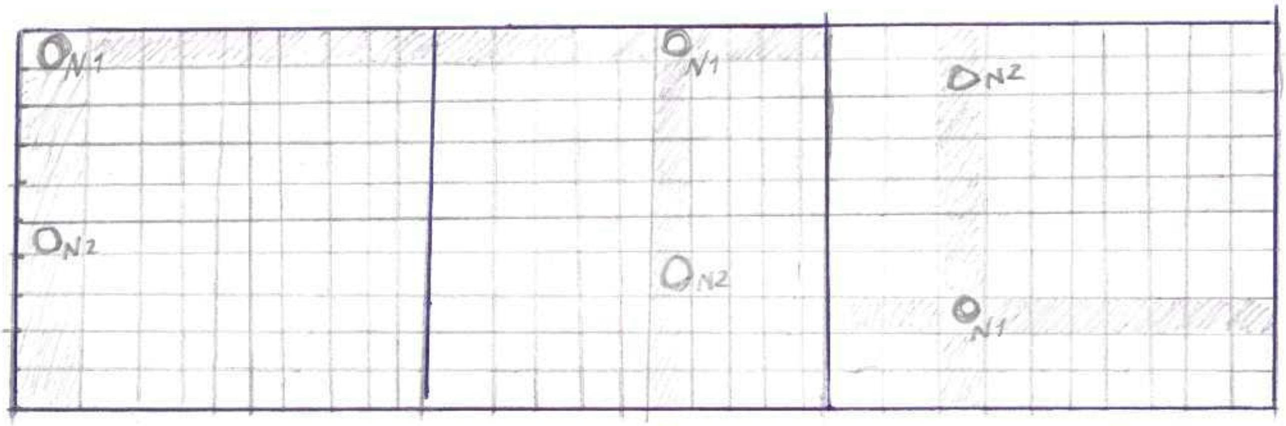
Разобьём поле на квадраты 10×10.

Таких квадратов будет 10 000 шт.

~~Допустим~~ Предположим, что возможно такое расположение гепардов, при котором на доске будет находиться более 100 000 гепардов, не бьющих друг друга (т.е. минимум — 100 001)

А мы помним, что квадратов 10×10 у нас 10 000 шт.

Тогда по принципу Дирихле найдётся квадрат 10×10, в котором будет минимум 11 гепардов.



Первый из этих 11 гепардов может находиться в углу кв. 10×10, скраю или примерно по центру.

Второй гепард должен располагаться либо в том же столбце, либо в той же строке, что и первый. Опять же для определённости будем считать, что он находится в том же столбце.

Но тогда он исключает возможность нахождения остальных 9 гепардов в той же строке, что и первый. Значит все 11 гепардов будут располагаться в одном столбце (или в одной строке, если бы ~~на~~ второй гепард стал в той же строке что и первый, т.е. результат не зависит от выбора столбца или строки тем более, что это квадрат.).

Но в одном столбце (строке) только 10 клеток и 11 гепардов там разместить нельзя. Зн. в кв. 10×10 невозможно разместить 11 гепардов так, чтобы они не били друг друга. Тогда наше предположение, что на доске можно разместить больше 100 000 гепардов, небьющих друг друга

B-22.

10.7. - продолжение.

...Тогда наше предположение, что на доске можно положить более 100 000 гепардов, не бьющих друг друга неверно.

Ответ: 100 000 гепардов.

3.