Шифр:

В-16

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2017/2018
Ленинградская область

Район Гатчинский

Школа Сиверская гимназия

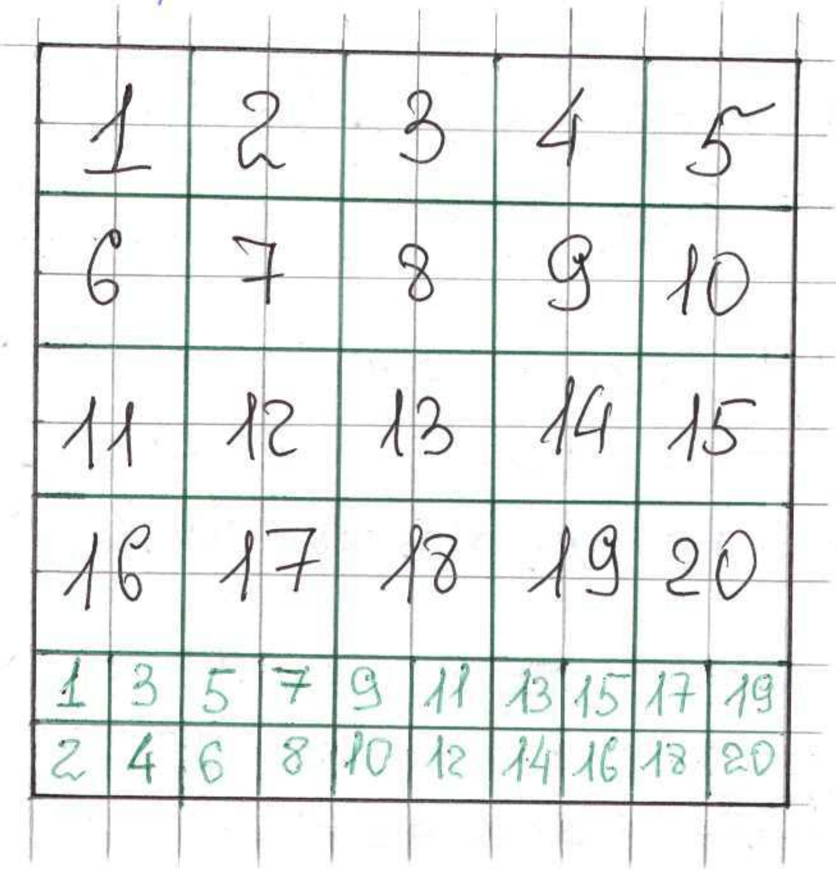
Класс 10

ФИО Лукашов Никита
Вадимович

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	X	0	21

№ 10.1.

Пример:



Исходный квадрат — 10×10 ~~клет~~ клеток.
Разбиваем так, как показано на рис. слева.
Нетрудно заметить, что все условия выполнены.

№ 10.2.

Ответ: выигрывает Вася.

Решение:

1. Как известно, если a_1, a_2 и a_3 $(a_1 < a_2 < a_3)$ образуют арифметическую прогрессию, то $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ (верно и обратное утвержк-

дение.

2. Пусть первым ходом Петя поставил число a_1.

3. Рассмотрим случай, если $a_1 \leq 1009$: снова рассмотрим 2 случая:

I a_1 – чётное. Тогда Вася пишет на доске ~~20~~ 2017. Заметим, что следующим своим ходом Петя не может поставить такое число a_3, чтобы $a_1, 1009, a_3$ образовали арифметическую прогрессию.

Действительно: если $a_3 = \frac{a_1+2017}{2}$, то $a_3 \notin N$ (т.к. a_1 – чётное); если $a_1 = \frac{2017+a_3}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_3 = 2a_1 - 2017$, то $a_3 \notin N$ (т.к. $a_3 < 0$);
если $2017 = \frac{a_1+a_3}{2} \Leftrightarrow a_3 = \cancel{4003}\, 4034 - a_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_3 \geq 3026$, что не подходит по условию задачи.

Пусть своим следующим ходом Петя ставит любое число a_3, тогда Вася на доске пишет $\frac{a_1+a_3}{2}$, если a_3 – чётное, или $\frac{2017+a_3}{2}$, если a_3 – нечётное и выигрывает.

a_1 – нечётное.

II Рассуждая аналогично случаю I, приходим к выводу, что также выигрывает ~~В~~ Вася: он ставит сначала 2018, а затем $\frac{2018+a_3}{2}$, если a_3 – чётное, или, $\frac{a_1+a_3}{2}$, если a_3 – нечётное (а$_3$ – это число, которое поставил Петя своим вторым ходом).

В-16

4. Если $a_1 \geq 1010$, то рассуждения производятся аналогичным образом пункту 3. Поэтому просто привожу схему выигрыша Васи:

a_1

- чётное
  - Вася пишет 1
  - Петя пишет любое a_3
  - a_3
    - чётное: Вася пишет $\frac{a_1+a_3}{2}$ и выигрывает
    - нечётное: Вася пишет $\cancel{a_1+}\ \frac{1+a_3}{2}$ и выигрывает.
- нечётное
  - Вася пишет 2.
  - Петя пишет любое a_3
  - a_3
    - чётное: Вася пишет $\frac{a_3+2}{2}$ и выигрывает.
    - нечётное: Вася пишет $\frac{a_1+a_3}{2}$ и выигрывает.

Таким образом, как бы не играл Петя, всё равно выиграет Вася.

№ 10.3

$x^5 - y^3 \geq 2x \overset{?}{\Leftrightarrow} \left(\frac{x^3}{y}\right)^3 \geq 2\cdot\frac{x^5}{y^3} + x^4$.

Докажем, что $2\cdot\frac{x^5}{y^3}+x^4 \geq 8$ (*), но прежде заметим, что $x^5-y^3 \geq 2x \Leftrightarrow -y^3 \geq 2x - x^5$ (**)

(*) $\Leftrightarrow 2x^5 + x^4y^3 - 8y^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^5 + y^3(x^4-8) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^5 + (-y^3)(8-x^4) \geqslant 0$. В силу (**) ~~имеем~~ имеем: $2x^5 + (-y^3)(8-x^4) \geqslant 2x^5 + (2x - x^5)(8-x^4) =$
$= \cancel{2x^5} + 16x - \cancel{2x^5} - 8x^5 + x^9 = x(x^8 - 2\cdot 4x^4 + 4^2) =$
$= x(x^4-4)^2$.

Т.к. по условию $x>0 \Rightarrow x(x^4-4)^2 \geqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (*), очевидно верно.

Т.к. $\left(\frac{x^3}{y}\right)^3 \geqslant 2\cdot\frac{x^5}{y^3} + x^4$, а $2\cdot\frac{x^5}{y^3} + x^4 \geqslant 8$, то

$\left(\frac{x^3}{y}\right)^3 \geqslant 8 \Leftrightarrow \frac{x^3}{y} \geqslant 2 \Leftrightarrow x^3 \geqslant 2y$, quod erat demonstrandum.

№ 10.5.

Пусть мы нашли такую расстановку, которая удовлетворяет условию задачи. Обозначим её:

$$\begin{matrix} & x_n \; x_1 & \\ x_{n-1} & & x_2 \\ x_{n-2} & & x_3 \\ \vdots & & x_4 \\ & \cdots & \end{matrix}$$

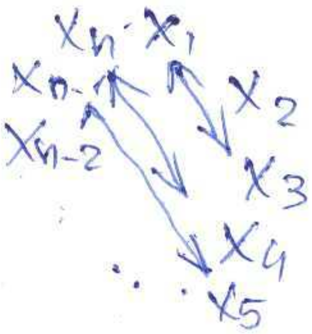
и назовём её красивой

Ответить на вопрос задачи это всё равно, что указать, ~~сколькими способами~~ сколько расстановок мы

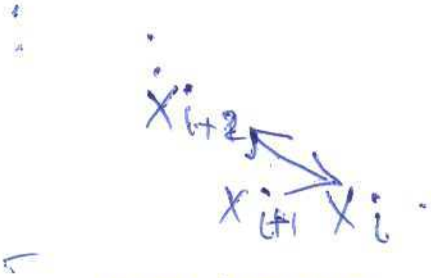
4

можем получить из красивой расстановке меняя x местами. B-16

Допустим мы поменяли x_1 и x_3 местами, $x_3+x_1 \,\vdots\, x_2$, но чтобы расстановка оставалась правильной, мы должны поменять местами x_4 и x_n ($x_n+x_2 \,\vdots\, x_1$) и т.д., то есть получаем параллельные „хорды замены":



Благодаря тому, что n - нечётное эти хорды как раз и сделают правильную расстановку. То есть хорда остановится на каком-то x_i x_{i+2}



И при такой замене мы получим новую расстановку, которая отражением переходит в красивую =)

мы не найдем новую расстановку.
Если менять x_2 и x_4, x_3 и x_5 и т. д.
то приходим к такому же выводу.
Таким образом, мы доказали, что
если возможно сделать расстановку,
которая требуется в условии, то
она единственная.

Ответ: 1

B-16

1	2	3	4	5	Σ
7	0	0	0	0	7

№ 10.6.

Для доказательства того, что среди выписанных дробей найдётся дробь, равная $d-1$, нам достаточно указать эту дробь.

По условию, эта дробь имеет вид $\frac{i}{n-i}$. Найдём i: $\frac{i}{n-i} = d-1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow i = n(d-1) - i(d-1) \Leftrightarrow i(\cancel{1} + d \cancel{-1}) = n(d-1) \Leftrightarrow i = \frac{n(d-1)}{d}$, по условию $n \vdots d \Rightarrow i$ – ~~целое~~ натуральное или 0, и как не трудно заметить, $i < n \Rightarrow$ i – существует $\Rightarrow$ существует дробь $\frac{i}{n-i}$, где $i = \frac{n(d-1)}{d}$, которую нам и надо было указать, quod erat demonstandum.

№ 10.9.

Для доказ~~ане~~ательства утверждения задачи нам достаточно указать это n.

Возьмём ~~два~~ n любых простых ~~соседних~~ ~~простых~~ последовательных чисел ~~1 они~~ из $(10^{2018}; +\infty)$. Они точно (1)

найдутся, так как, как известно простых чисел бесконечно много.
Обозначим их p_1, ~~и~~ $p_2, \dots, p_n$ соответсвенно.
$(p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n)$.

~~Рассмотрим p_1: если Σ возможно два случая:~~
~~I Сумма всех простых чисел (Σ_1), меньших p_1 – чётная.~~

Пусть сумма всех простых чисел, меньших p_i, равна s_i

НОД$(p_1, s_1) = a_1$ ($a_1 \neq 1$ иначе $n = p_1$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ найдутся такие v_1 и $u_1 \in \mathbb{Z}$, что $v_1 p_1 + u_1 s_1 = a_1 \Rightarrow p_1 = \frac{a_1 - u_1 s_1}{v_1}$.

Нетрудно заметить, что
$s_2 = s_1 + p_1$, $s_3 = s_2 + p_2 = p_1 + p_2 + s_1, \dots,$
$s_n = s_1 + p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$

НОД$(p_2, s_2) = a_2$ ($a_2 \neq 1$, иначе $n = p_2$) $\Rightarrow$
$$v_2 p_2 + u_2 s_1 + u_2 \frac{(a_1 - u_1 s_1)}{v_1} = a_2, \quad v_2, u_2 \in \mathbb{Z}$$

. . . . .

$$v_n p_n + u_n s_n = a_n \ (a_n \neq 1), \quad v_n, u_n \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

в ряду $a_1, a_2, \dots, a_n$ нет ни одной единицы, но это неверно, так как при $n \to \infty$, хотя бы одно $a_i = 1$, quod erat demonstandum.

почему?

B-16

№ 10.7.

Внутри собранного четырёхугольника, 4 одинаковых треугольника имеют общую вершину. Действительно: пусть какой-то треугольник не имеет общую вершину с каким-то треугольником $\Rightarrow$ появился зазор, чего не может быть по условию.

$\Downarrow$

~~Что все~~ Все углы при этой вершине — прямые. Действительно: если треугольн. остроуг. $\Rightarrow$ сумма углов при этой вершине $\leq 360°$; если треуг. тупоуг. $\Rightarrow$ в любом случае четырёхуг. не получ. (при вершине 3 острых уг. и 1 тупой $\Rightarrow$ четыр. угольника не сложить; если 2 тупых и 2 острых приходим к противор., что острый угол равен 0°, а 3 тупых угла, очевидно не годятся при одной вершине — появляется „разрыв").

Треугольники также соединены равными сторонами (иначе будет „разрыв") $\Rightarrow$ получившийся 4-угольник-ромб (по признаку: диаг. $\perp$ и делятся т. пересеч. пополам) $\Rightarrow$ ответ на вопрос задачи утвердительный.

Ответ: обязательно.

№ 10.8.

Ответ: 50.000.

Решение:

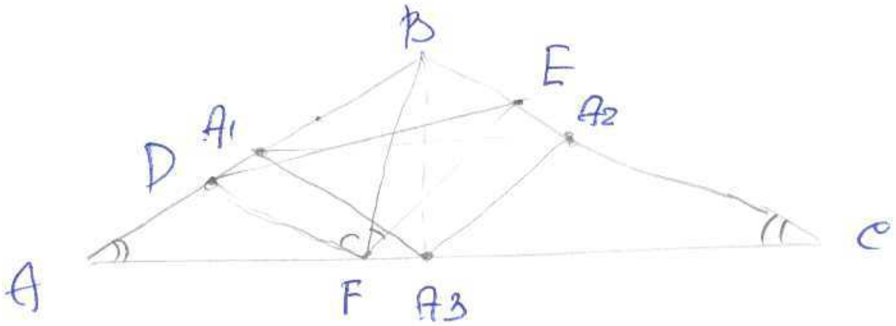
Для того, чтобы гепардов было как можно больше, нужно, чтобы зона биения одного гепарда перекрывала как можно больше зону биения другого гепарда => гепарды стоят рядом => это возможно только при такой расстановке (расстановку, получающуюся поворотом, не учитываем):
на первой строке стоит ~~го гепа~~ 1000 гепардов
на 20 строке также 1000 гепардов
. . .
на 1000 строке — 1000 гепардов.

При такой расстановке, гепарды, очевидно, не бьют друг друга => их количество $1000 \cdot \frac{1000}{20} = 50.000$.

№ 10.10.

A_1, A_2 и A_3 - середины AB, BC, AC соотв.
Пусть $P_{\triangle A_1A_2A_3} = p_3$. Т.к. A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 - средние линии $\triangle ABC$ => $p = 2p_3$.
Для того, чтобы доказать $p \leq 2p_1$,

достаточно доказать, что $p_3 \le p_1$. В-16



Для этого будем двигать DE относительно A_1A_3, при этом т. F будет определяться однозначно.

→ - движется по направлению.

Возможно только 4 движения:

I. $D \to A$, $E \to B$; $DE > A_1A_2$, $FE > A_3A_2$

II $D \to B$, $E \to C$; $DE > A_1A_2$, $DF > A_1A_3$

III $D \to B$, $E \to B$;

IV $D \to A$, $E \to C$;

Примечание: за начало движения принимаем вершины $\triangle ABC$.