Шифр: В-4

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап

2017/2018
Ленинградская область

Район Гатчинский

Школа Сиверская гимназия

Класс 10 (2)

ФИО Бурьян Ирина Николаевна

1	2	3	4	5	Σ
7	0	7	0	X	14

Задача 10.2

1) Игра точно завершится после 5 ходов, т.к. на 5 $1^{ый}$ игрок однозначно выстроит прогрессию, но может завершиться раньше.

2) Будем играть за 2 (Васю). Разобьём все натуральные числа, не превосходящие 2018, на 2 группы:

$$\underbrace{1 \ldots 1009}_{\text{I гр.}} \Big] \underbrace{1010 \ldots 2018}_{\text{II гр.}}$$

3) Пусть 1 выберет любое число из I гр. Если оно чёт, и 2 выберет любое другое тоже чётное число, то на третий ход 1 может выстроить прогрессию просто взяв среднее арифм. написанных на доске чисел: $a \ldots a+n \ldots a+2n$. Аналог, если оба числа нечётные. Поэтому 2 должен $2^{ым}$ ходом (своим первым) выбрать число иной чётности, чем выбрал 1. И так на протяжении всей игры.

4) Если 2 выберет число иной четности (в нашем предположении нечётное) из I гр, то 1 следующим ходом создаст прогрессию

$\underbrace{\underset{\substack{1\,ход\\1\,игрок}}{a} \ldots \underset{\substack{2\,ход\\2\,игрок}}{b}}_{\text{порядок не важен}} \ldots \underset{\substack{3\,ход\\1\,игрок}}{b+(b-a)} = 2b-a$, т.к. число $2b-a \leq 2018$, т.к. $2b \leq 2018$ по нашему предположению ($max_{\text{I гр}} = 1009$)

Аналог, если оба числа на доске после $2^{го}$ хода будут из II гр:

$a-(b-a) = 2a-b$ — 3 ход, 1 игрок выигрывает.

$\underbrace{\underset{1}{a} \quad \underset{2}{b}}_{\text{порядок не важен}}$

$2a-b \geq 1$, т.к. $\left.\begin{array}{l} a_{min} = 1010 \\ b_{max} = 2018 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a-b \geq 2$.

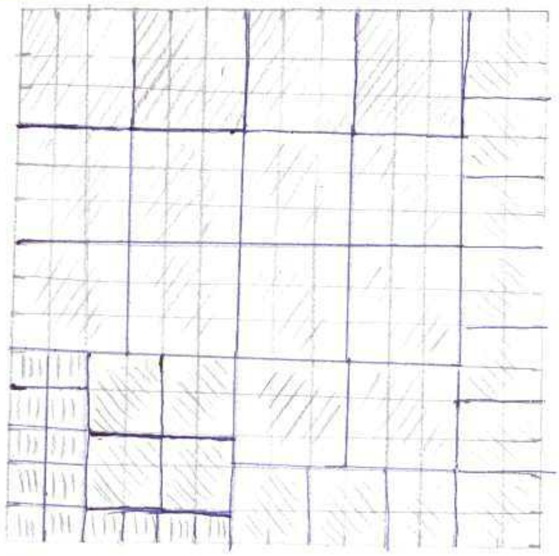
5) Тогда 2 игрок своим первым ходом выбирает число иной чётности и группы. Тогда 1 игр. третьим ходом не может выстроить прогрессию. Он просто выбирает число. Но тогда в любом случае в какой-то из групп окажутся выбраны 2 числа $\Rightarrow$ 2 игрок на $4^{ом}$ ходу по описанному выше алгоритму выстроит прогрессию и выиграет.

Ответ: у Васи.

4

№10.1

1 2 3 4 5 $\boxed{B-4}$
7 0



Итого: квадрат 14×14 разбит на

14 3×3
14 2×2
14 1×1

Посмотрим по площадям : $n \cdot a^2 + n \cdot b^2 + \ldots = x^2$, где n - число квадратиков данного вида. $\Rightarrow n(a^2+b^2+\ldots) = x^2$

Будем перебирать. $1^2+2^2=5 \Rightarrow 5(1^2+2^2)=25$, но такой квадрат 5×5 разрезать невозможно.

$1^2+2^2+3^2 = 14 \Rightarrow 14(1^2+2^2+3^2) = 14^2$, квадрат со стороной 14. Его разрезание уже возможно.

$\boxed{\text{Задача 10.3}}$

$x^5 - y^3 \geqslant 2x \iff x^5 - 2x \geqslant y^3$, т.к. обе части положительные ($y^3 > 0$ по условию, а $x^5 - 2x \geqslant y^3$), можно извлечь корень :

$$y \leq \sqrt[3]{x^5 - 2x}$$

(!) $x^3 \geqslant 2y$, заменим y на большее или равное, усилим неравенство:

$$x^3 \geqslant 2\sqrt[3]{x^5 - 2x}$$; обе части положительные, можно возвести в степень:

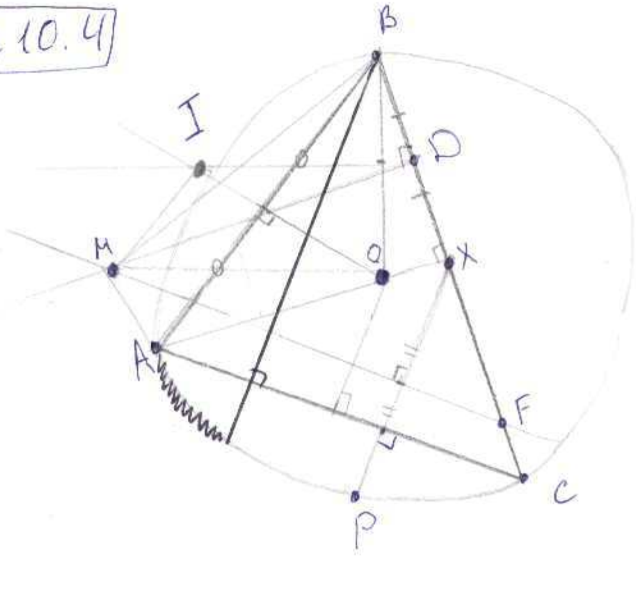
$$x^9 \geqslant 8(x^5 - 2x)$$

$$x^9 - 8x^5 + 16x \geqslant 0$$

$$x(x^8 - 8x^4 + 16) \geqslant 0$$

$$\underset{\overset{\vee}{0}}{x}\ \underset{\overset{\vee}{0}}{(x^4 - 4)^2} \geqslant 0$$ – верно, значит, и исходное неравенство тоже верно.

$\boxed{\text{Задача 10.4}}$



~~(!) |OM| = |OB| (как OA или OC)~~
т.к. A, B, C ∈
(!) $IM = IA = IB = IO$.

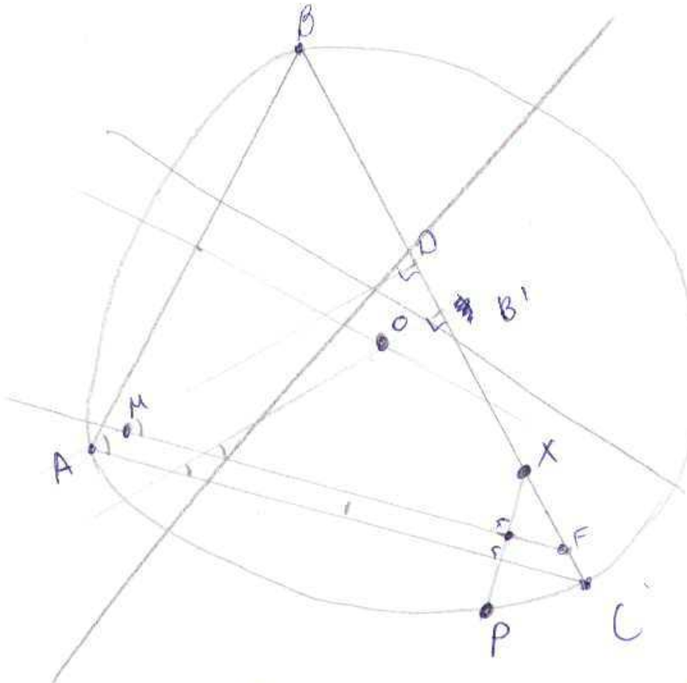
1. Центр описанной окр-ти лежит на пересечении серединных перпендикуляров. ~~Т.~~ Построим точки O и M (где M – центр окр-ти, опис. около $\triangle BXP$) через построение сер. перп.

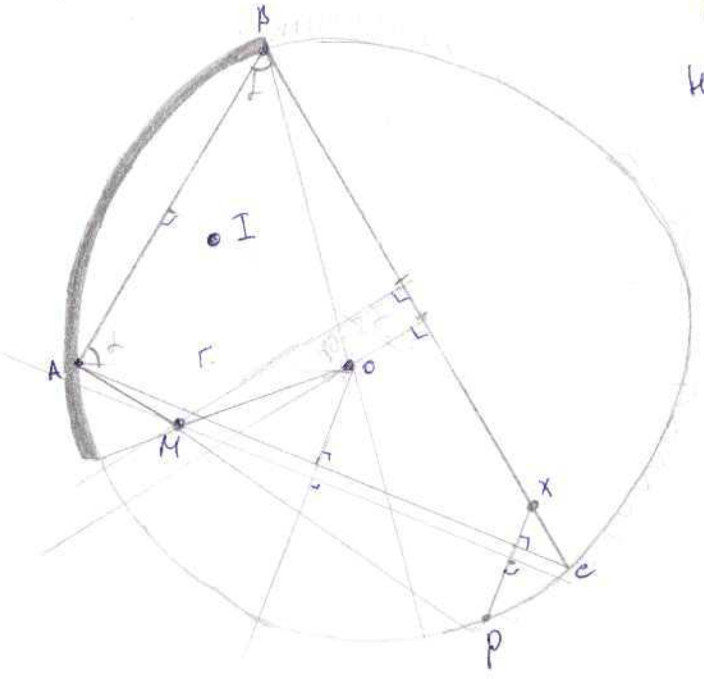
$(MF) \parallel (AC)$ т.к. $AC \perp XP$ и $MF \perp XP$; $MD \parallel A$

По условию т. $X \in [BC]$, поэтому P не может быть выбрана вбл-ти за перп. из т. B

B-4

В-4





Рассмотрим четырёхуголь-ник ABOM.
Т.к. O - центр опис. около ΔABC окр-ти, $AO = BO$.

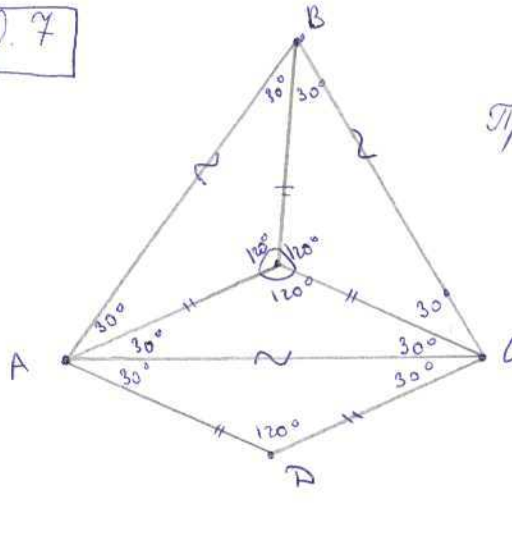
(1)6	(2)7	(3)8	(4)9	(5)10	Σ
7	7	X	X	0	14

$\boxed{\text{Задача 10.6}}$ Рассмотрим ряд дробей, равных исходным, увелич. на 1: $\frac{0}{n}+1$; $\frac{1}{n-1}+1$; ... $\frac{n-1}{n-(n-1)}+1$

$\Downarrow$ $\frac{n}{n}$, $\frac{n}{n-1}$; $\frac{n}{n-2}$ .... $\frac{n}{1}$ т.к. исх дроби в общем виде представимы как $\frac{x}{n-x} \Rightarrow \frac{x}{n-x}+1=\frac{n}{n-x}$.

Заметим, что числа в знаменател дробей полученного ряда пробегают значения от 1 до n, в т.ч. и все возможные делители числа n. Пусть $n = d \cdot a \Rightarrow$ обязательно в знаменателе встретится число a (т.к. $a \leq n$ по опр) $\Rightarrow$ их частное будет равно d. Но данная дробь $\underset{d}{\underset{\shortparallel}{\frac{n}{a}}}$ была получена из какой-то вида ~~n~~ $\frac{x}{n-x}=\frac{n}{a}-1=d-1$. Таким образом, дробь, равная $d-1$, найдётся всегда.

$\boxed{\text{Задача 10.7}}$

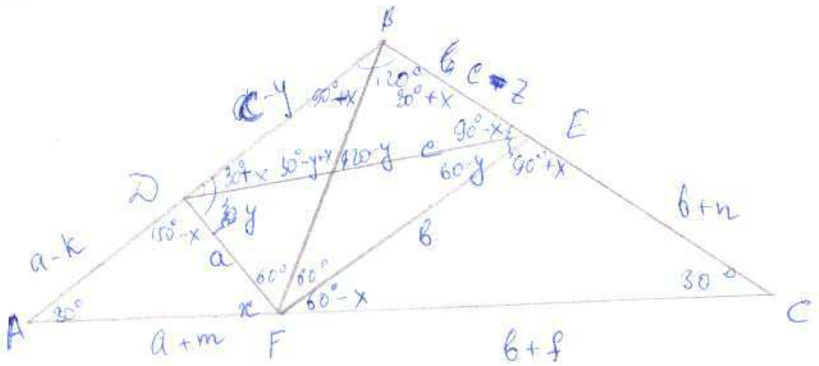


Нет, неверно.

Пример:

Никакие стороны ABCD не||-ны, т.к. никакие 2 соседних не дают в сумме 180°.

Задача 10 10



1. $\triangle ABC$ - р/б $\Rightarrow AB = BC$

2. Против большего угла лежит большая сторона. Используем этот факт. Пусть $\hat{AFD} = x$, тогда все ост. углы выразим через x.

$\exists\ DF = a;\ FE = b;\ DE = c$. Пусть также $x < 30°$ (иначе переобозначим)

$\Rightarrow$ т.к. $D\hat{A}F > DFA$ $\quad AD < DF \Rightarrow DF = AD - k = a - k$. Аналогично с остальными: $DB = c - y$, $BE = c + z$, $EC = b + n$; $FC = b + f$; $AF = a + m$

Тогда $p = 2p_1 + \underbrace{m + f + n + z - y - k}_{?0}$. и сравнение не удалось

3. По т. синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Применим:

$\triangle ADF$: $\frac{a}{\sin 30°} = \frac{a-k}{\sin x} \Rightarrow \quad 2a\sin x = a - k \Rightarrow -k = a(2\sin x - 1)$

$\triangle ADF$: $\frac{a}{\sin 30°} = \frac{a+m}{\sin 150° - x} \quad 2a(\sin(\pi - (30° + x)) = a + m \Rightarrow$

$2a(\sin 30° \cos x + \cos 30° \sin x) = a + m \Rightarrow$

$a\cos x + \sqrt{3}a\sin x = a + m \Rightarrow m = a(\cos x + \sqrt{3}\sin x - 1)$

$\triangle EFC$: $\frac{b}{\sin 30°} = \frac{b+n}{\sin(60° - x)} \Rightarrow \quad 2b(\sin 60° \cos x - \sin x \cdot \cos 60°) = b + n \Rightarrow$

$b \cdot \sqrt{3}\cos x - b \cdot \sin x = b + n \Rightarrow$

$n = b(\sqrt{3}\cos x - \sin x - 1)$

$\triangle EFC$: $\frac{b}{\sin 30°} = \frac{b+f}{\sin(90° + x)} \quad \Rightarrow 2b \cdot \cos x - b = f \Rightarrow f = b(2\cos x - 1)$

$\triangle DFB$: $\frac{c-y}{\sin 60°} = \frac{a}{\sin(90° - x)} \Rightarrow (c - y)\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\cos x} \Rightarrow c - y = \frac{a\sqrt{3}}{2\cos x} \Rightarrow y = c - \frac{a\sqrt{3}}{2\cos}$

$\triangle EFB$: $\dfrac{c-z}{\sin 60^\circ} = \dfrac{b}{\sin(30^\circ+x)} \Rightarrow c-z = \dfrac{b\cdot\sqrt3}{2\left(\frac12\cos x + \frac{\sqrt3}{2}\sin x\right)} =$ B-4

$= \dfrac{b\sqrt3}{\cos x+\sqrt3\sin x} \Rightarrow z = c - \dfrac{b\sqrt3}{\cos x+\sqrt3\sin x}$

4. т.к. $AB = BC$, $a + \cancel{c} - k - y = \cancel{c} + b - n - z$

$a - k - \cancel{c} + \dfrac{\cancel{b\sqrt3}\ \frac{a\sqrt3}{2\cos x}}{\cancel{\cos x+\sqrt3\sin x}} = b - n - \cancel{c} + \dfrac{b\sqrt3}{\cos x+\sqrt3\sin x}$

$-k - y = b - n - z - a$

$\Rightarrow p = 2p_1 + m + f + \cancel{n} - z + b - \cancel{n} - z - a = 2p_1 + m + f - 2z + b - a$

5. $p = 2p_1 + a(\cos x + \sqrt3\sin x - 1) + b(2\cos x - 1) + b(\sqrt3\cos x - \sin x - 1) +$

$+ a(2\sin x - 1) + \dfrac{b\sqrt3}{\cos x+\sqrt3\sin x} - c - c + \dfrac{a\sqrt3}{2\cos x} =$

$= 2p_1 + (-2p_1 + \ldots) =$

$p = 2p_1 + a\cos x + a\sqrt3\sin x - a + b\,2\cos x - \cancel{b} + \cancel{b} - a - \cancel{b\sqrt3}$

$- 2c + \dfrac{2b\sqrt3}{\cos x+\sqrt3\sin x} = 2p_1 + a(\cos x + \sqrt3\sin x - 2) +$

$+ 2b\left(\cos x + \dfrac{\sqrt3}{\cos x+\sqrt3\sin x}\right) - 2c$

$a(\cos x + \sqrt3\sin x - 2) + 2b\,\dfrac{\cos^2 x + \sqrt3\cos x\sin x + \sqrt3}{\cos x+\sqrt3\sin x} - 2c \vee 0.$

c - самая большая сторона в $\triangle DEF$.

$2b\left(\cos x + \dfrac{\sqrt3}{\cos x+\sqrt3\sin x}\right) < 2b$, т.к. $\cos x + \dfrac{\sqrt3}{\cos x+\sqrt3\sin x} < 1$

$\cos^2 x + \sqrt3\cos x\sin x + \sqrt3 < \cos x + \sqrt3\sin x$

$\cos x(\cos x - 1) + \sqrt3\sin x(\cos x - 1) + \sqrt3 < 0.$

$(\cos x + \sqrt3\sin x)(\cos x - 1) + \sqrt3 < 0.$