Рассмотрение равновесия и устойчивости движения в школьной программе. Теория и решение задач.

Лекция Новосельцева Б.С.

Начиная рассказ школьникам об устойчивости положения равновесия или движения тела, учитель обычно говорит, что равенство нулю суммы сил и моментов, действующих на тело является только необходимым условием его неподвижности или движения с постоянной скоростью, и добавляет, что в реальности эти состояния (решения) могут не реализовываться. После чего приводится пример с мячиком, находящимся или на вершине горки или на дне ямы. Эти примеры заканчиваются общим утверждением: *Если небольшое отклонение предмета из состояния равновесия (или от равномерного движения) приводит к появлению сил (или их суммарного момента), возвращающих его в исходное состояние, то такое положение – устойчиво, а если - уводящих тело из него, то – не устойчивое.* После них можно сказать, что эти примеры хорошо иллюстрируют общее положение: *механические системы стремятся к состоянию с минимумом потенциальной энергии.* И использовать это утверждение при решении сложных и олимпиадных задач. В качестве примера можно привести атомы, которые находятся в узлах кристаллической решетки твердого тела – они пребывают в таких потенциальных «ямах».

Школьная программа для простых (не физико-математических) школ не позволяет более подробно рассмотреть вопрос равновесия, хотя задачи на равновесие часто встречаются на олимпиадах. Поэтому для учащихся таких школ важно дать эту тему на факультативных занятиях или в рамках системы дополнительного образования.

Задачи

Вначале освоения походов при решении задач на тему устойчивости имеет смысл рассмотреть ряд примеров, имеющих и методологическое значение.

Слесарь Петелькин изготовил из спицы изделие: на изогнутую часть спицы надел невесомое колечко, которое может скользить по спице без трения. После раскручивания спицы вокруг вертикальной оси ОУ со скоростью ω он попросил ученика рассчитать, как зависит положение (координаты x и y) колечка от циклической частоты на спице, а) прямой и повернутой под углом α к горизонту, б) изогнутой по параболе $y = ax^2$, в) изогнутой по кубической – $y = ax^3$.

Решения.

Поместим начало координат в точку пересечения спицы с осью вращения.

$\boldsymbol{y = ax}$. Соотношение сил в точке равновесия (условие равенства проекции сил на касательную к спице):

$$m\omega^2 \cdot x = mg \cdot tg\ (\alpha) = mg \cdot a. \qquad (1)$$

Точка равновесия: $x = ga/\omega^2$.

При небольшом отклонении вверх от нее, проекция силы тяжести на касательную к спице остается прежней, а проекция центробежной силы растет (см. (1)). Поэтому колечко не вернется в эту точку. Вывод: неустойчивое равновесие.

$\boldsymbol{y = ax^2}$. Из условия равенства проекции сил на касательную к спице в точке равновесия получим:

$$m\omega^2 \cdot x = mg \cdot tg\ (\alpha) = mg \cdot 2ax \qquad (2)$$

$$x(\omega^2 - 2g \cdot a) = 0.$$

Точка равновесия: $\boldsymbol{x = 0}$, при этом значение в скобке может быть любым, т.е. – при любой частоте вращения.

$\omega^2 > 2g \cdot a$. При небольшом отклонении от нее, проекция силы тяжести на касательную к спице растет медленнее, чем проекция центробежной силы (отклоняющая сила растет быстрее, чем возвращающая, см. (2)). Поэтому колечко не вернется в эту точку. Вывод: неустойчивое равновесие.

$\omega^2 < 2g \cdot a$. Рассуждая аналогично получаем, что это вариант устойчивого равновесия.

Рассмотрим случай $\omega^2 = 2g \cdot a$. В этом случае при любом x выполняется равновесие сил. Поэтому при любом малом смещении из какой-либо точки, колечко остается в новом положении.

$\boldsymbol{y = ax^3}$. Соотношение сил в точке равновесия:

$$m\omega^2 \cdot x = mg \cdot tg\ (\alpha) = mg \cdot 3ax^2. \qquad (3)$$

Точки равновесия: $\boldsymbol{x_1 = 0;\ x_2 = \omega^2/(3ga)}$.

Рассмотрим точку $x_1 = 0$. При небольшом отклонении от нее, проекция силы тяжести на касательную к спице растет медленнее, чем проекция центробежной силы (см. (3)). Поэтому колечко не вернется в эту точку. Вывод: неустойчивое равновесие.

Рассмотрим точку $x_2 = \omega^2/(3ga)$. При небольшом отклонении вправо от нее, проекция силы тяжести на касательную к спице растет быстрее, чем проекция центробежной силы. Поэтому колечко вернется в эту точку. Аналогично рассуждаем про отклонение влево. Вывод: устойчивое равновесие. Добавляем, что *колечко, сместившись из точки 1, перейдет в точку 2.*

Рассмотрим эти задачи с точки зрения утверждения о минимуме потенциальной энергии в ситуации устойчивого равновесия.

Перейдем в систему координат, в которой спица не двигается. В ней есть поле центробежных сил. Найдем потенциальную энергию центробежных сил.

$$dU = - A = - Fdx = - m\omega^2 xdx = d(-m\omega^2 x^2/2), \qquad (4)$$

откуда

$$d(U + m\omega^2 x^2/2) = 0 \text{ или } U + m\omega^2 x^2/2 = const. \qquad (5)$$

Общая потенциальная энергия равна:

$$U = mgy - \frac{m\omega^2 x^2}{2} + U_0. \qquad (6)$$

U_0 не влияет на характер зависимости потенциальной энергии от координаты, поэтому в нашем анализе ее можно занулить.

y = ax.

$$U = mgax - \frac{m\omega^2 x^2}{2} = mx(ga - \omega^2 x/2). \qquad (7)$$

Эта парабола имеет ветви, направленные вниз, и поэтому не имеет минимума, а значит и невозможно устойчивое равновесие. Отметим, что точка неустойчивого равновесия соответствует максимуму U ($ga = \omega^2 x$). В точках неустойчивого равновесия потенциальная энергия имеет локальный максимум.

y = ax².

$$U = mgax^2 - \frac{m\omega^2 x^2}{2} = mx^2(ga - \omega^2/2). \qquad (8)$$

У этой параболы, если выражение в скобках больше нуля, то в точке x = 0 – минимум, потенциальная яма и устойчивое равновесие. Если же $ga < \omega^2/2$, то в нуле – максимум функции, «горка» и неустойчивое положение. При $\omega^2 = 2g{\cdot}a$ потенциальная энергия не зависит от координаты – перемещение из любой точки спицы не вызывает изменения общей потенциальной энергии. Поэтому при любом малом смещении из какой-либо точки, колечко остается в новом положении.

y = ax³.

$$U = mgax^3 - \frac{m\omega^2 x^2}{2} = mx^2(gax - \omega^2/2). \qquad (9)$$

Взяв первую производную и проанализировав функцию на экстремум, находим, что график этой функции имеет локальный максимум в точке $x_1 = 0$ и локальный минимум в точке $x_2 = \omega^2/(3ga)$. Т.е. x_1 – неустойчивая точка, а x_2 – устойчивая.

Примечание. По окончанию занятия желательно с учениками отрефлексировать пройденный материал, предложив им ответить на вопрос, какой из двух методов им больше понравился и почему.

В олимпиадных задачах при анализе на устойчивость часто надо принять во внимание изменение соотношения не сил, а моментов сил. Рассмотрим три такие задачи с регионального этапа олимпиады.

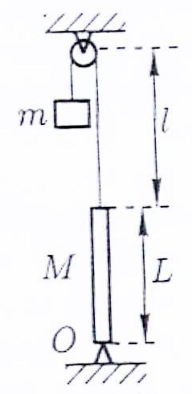


Рис. 1

1. Устойчивость стержня (XL, 10 кл., 2007).

Один конец однородного стержня массой M и длиной L опирается на шарнир O, а другой – прикреплен к легкой нити, перекинутой через блок (рис. 1). К свободному концу нити привязан груз массой m. Расстояние от стержня до блока равно l. При какой массе груза вертикальное положение стержня будет устойчиво (то есть при его отклонении от вертикали на малый угол будет возникать сила, возвращающая стержень в исходное положение?

Решение.

Пусть стержень отклонился от вертикали на малый угол α, тогда нить отклонится от вертикали на угол $\beta \approx \alpha L/l$ (Рис. 2). Чтобы он вернулся в исходное положение, момент силы натяжения нити $T = mg$, имеющей плечо $l_1 = \sin(\beta)(l + L) \approx \beta(l + L)$ относительно полюса O, должен превысить момент силы тяжести стержня $F = Mg$, имеющей плечо $l_2 = tg(\alpha)L/2 \approx \alpha L/2$ относительно того же полюса:

$$mg\cdot\beta(l + L) > Mg\cdot \alpha L/2 \qquad (11)$$

откуда

$$m > M/(2(1+ L/l) \qquad (12)$$

Решение по принципу минимума потенциальной энергии для 11 класса.

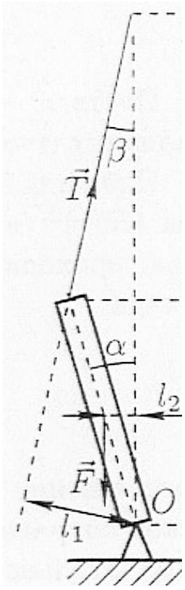


Рис. 2

Рассмотрим изменение потенциальной энергии системы при отклонении стержня M на угол α:

$$U(\alpha) = U(0) - Mg\frac{L}{2}((1-\cos\alpha) + mg\frac{\{L(1-\cos\alpha)+l(1-\cos\beta\}}{\cos\beta} \qquad (13)$$

где $mg\{L(1-\cos\alpha)+l(1-\cos\beta\}$ – изменение потенциальной энергии груза m из-за его подъема; $-Mg\frac{L}{2}((1-\cos\alpha)$ - изменение потенциальной энергии груза M из-за его поворота.

Т.к. $1-\cos\alpha \approx \frac{\alpha^2}{2}$, то, используя $\beta \approx \alpha L/l$, получим:

$$U(\alpha) \approx U(0) + mg\left(L\frac{\alpha^2}{2} + \frac{L^2}{l}\frac{\alpha^2}{2}\right) - Mg\frac{L}{2}\frac{\alpha^2}{2} = U(0) + gL\frac{\alpha^2}{2}\left\{m\left(1+\frac{L}{l}\right) - \frac{M}{2}\right\}. \qquad (14)$$

Чтобы в точке α = 0 был минимум U (потенциальная “яма»), выражение в фигурной скобке должно быть больше нуля, и мы получаем тот же самый ответ.

Задача 2. Стержень и вода (11 класс, 2011 г.)

Тонкий стержень постоянного сечения состоит из двух частей. Первая из них имеет длину $l_1 = 10$ см и плотность $\rho_1 = 1{,}5$ г/см^3, вторая — плотность $\rho_2 = 0{,}5$ г/см^3 (рис. 1). При какой длине l_2 второй части стержня он будет плавать в воде (плотность $\rho_0 = 1$ г/см^3) в вертикальном положении?

Решение.

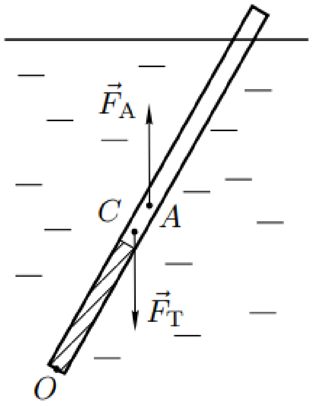


Рис. 28

Пусть S — площадь сечения стержня. Вес воды в объёме стержня:

$$P = \rho_0(l_1 + l_2)gS.$$

Вес стержня:

$$P_0 = (\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2)gS.$$

Стержень не будет тонуть, если $P > P_0$, откуда находим:

$$l_2 > l_1 = 10 \text{ см}.$$

Для того, чтобы стержень плавал вертикально, необходимо, чтобы при малом наклоне стержня возникал вращающий момент, стремящийся вернуть его в вертикальное положение. Это возможно, если точка приложения силы Архимеда $\vec{F}_\text{A}$ находится выше точки приложения силы тяжести $\vec{F}_\text{T}$, то есть геометрический центр A погружённой части расположен выше центра тяжести C стержня (рис. 28). Это условие можно представить в виде:

$$OA > OC$$

Оно же будет соответствовать и условию минимума потенциальной энергии (см. задачу 1): $U(\alpha) - U(0) = (P|OA| - P_0|OC|)(1-\cos\alpha) > P_0(|OA| - |OC|)\frac{\alpha^2}{2}$, где α – угол между вертикалью и стержнем.

Обозначим за L глубину подводной части стержня. Тогда:

$$L = \frac{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2}{\rho_0} = \frac{3}{2}l_1 + \frac{1}{2}l_2,$$

$$OA = \frac{L}{2} = \frac{1}{4}(3l_1 + l_2).$$

По определению расстояние от точки O до центра масс равно:

$$OC = \frac{\rho_1 l_1(l_1/2) + \rho_2 l_2(l_1 + l_2/2)}{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2} = \frac{3l_1^2 + 2l_1 l_2 + l_2^2}{2(3l_1 + l_2)}.$$

В этих обозначениях условие (14) примет вид:

$$(3l_1 + l_2)^2 > 2(3l_1^2 + 2l_1 l_2 + l_2^2),$$

$$3l_1^2 + 2l_1 l_2 - l_2^2 < 0.$$

С учётом того, что $l_2 > 0$, получаем ограничение сверху:

$$l_2 < 3l_1 = 30 \text{ см}.$$

Окончательный ответ:

$$10\text{ см} < l_2 < 30\text{ см}.$$

Задача 3. Свеча горела (XXXIX, 10 кл, 2005)

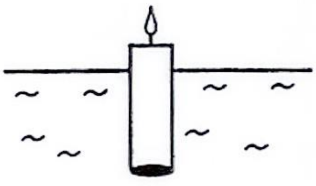


Рис. 14

Экспериментатор Глюк пустил плавать по тихому озеру горящую свечу. Чтобы обеспечить ей вертикальную устойчивость, к ее нижнему концу он прикрепил маленький груз (рис. 14). Определите максимальное время τ горения свечи, если она однородна по всей длине, имеет плотность $\rho = 0{,}9$ г/см^3 и время полного сгорания $\tau_0 = 20$ мин. Считайте, что вещество свечи сгорает без остатка. Плотность воды $\rho_0 = 1{,}0$ г/см^3.

Решение.

Пусть l — исходная длина свечи, x — длина выступающей на водой части, S — площадь поперечного сечения свечи (рис. 27). Поскольку при плавании свечи с грузиком в воде сила тяжести $F_т$, действующая на нее, уравновешена силой Архимеда $F_в$,

$$(M+m)g = \rho_0 g S(l-x), \quad \text{откуда} \quad x = l\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\frac{M+m}{M}\right),$$

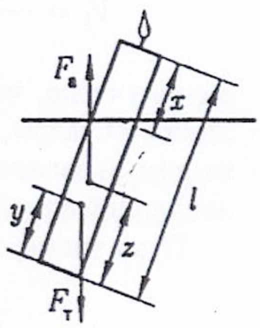


Рис. 27

где M — начальная масса свечи, m — масса грузика. Расстояния от нижнего конца свечи до точек приложения силы Архимеда и силы тяжести равны соответственно

$$z = \frac{l-x}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{M(l/2)}{M+m}.$$

Положение свечи с грузом будет устойчивым в воде, если при небольшом ее отклонении от вертикального положения возникает возвращающий момент сил, т.е. если *точка приложения действующей на свечу с грузом силы Архимеда выше точки приложения силы тяжести*: $\frac{l-x}{2} > \frac{M(l/2)}{M+m}$, откуда $\frac{m}{M} > \sqrt{\rho_0/\rho} - 1$.

Выше, в задаче 2, было показано, что *такое положение точек приложения сил соответствует принципу минимума потенциальной энергии*.

Время горения свечи будет максимально, когда будет минимальна масса грузика:

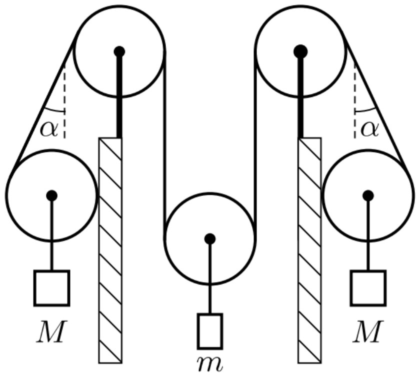
$$m = M\left(\sqrt{\rho_0/\rho} - 1\right)$$

Поскольку наименьшая, достаточная для устойчивого плавания свечи, масса грузика уменьшается с уменьшением M, то свеча останется устойчивой в течении всего времени горения.

Горение свечи прекратится, когда x обратится в нуль, т.е. при массе свечи:

$$M' = m\frac{\rho}{\rho_0 - \rho}.$$

Откуда время горения свечи: $\tau = \tau_0\left(1 - \frac{M'}{M}\right) = \frac{\tau_0}{1+\sqrt{\rho/\rho_0}} \approx 616\ c.$



Задача 4. М. О. 1987 год.

◊ **1.187.** [9–10] (1987, 8–2) В системе, изображённой на рисунке, блоки и нити невесомы. Массы грузов, подвешенных к крайним блокам, одинаковы и равны M, а наклонные участки нити составляют с вертикалью угол α. При каких значениях массы m груза, подвешенного к центральному блоку, и коэффициента трения μ между крайними блоками и опорами система будет находиться в равновесии? Будет ли это равновесие устойчивым?

1.187. Сила натяжения нити, соединяющей блоки, одинакова по всей её длине и равна, очевидно, $T = mg/2$. Рассмотрим условия равновесия какого-либо из боковых блоков (см. рис. 1.187). Вычисляя моменты сил, действующих на этот блок, относительно его центра, получаем, что $T = F_{\text{тр}}$, а из условий равновесия блока в горизонтальном и в вертикальном направлениях имеем:

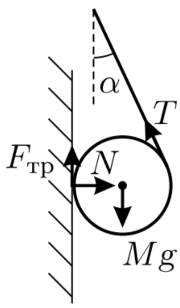


Рис. 1.187.

$$N = T \sin\alpha,$$

$$F_{\text{тр}} + T\cos\alpha = T(1+\cos\alpha) = \frac{mg}{2}(1+\cos\alpha) = Mg.$$

Отсюда

$$m = \frac{2M}{1+\cos\alpha}$$

и

$$N = F_{\text{тр}} \sin\alpha \leqslant \mu N \sin\alpha,$$

то есть $\mu \geqslant 1/\sin\alpha$.

Неравенство является условием отсутствия проскальзывания боковых грузов.

Покажем, что это равновесие устойчиво. Предположим, что нижний груз поднялся выше положения равновесия, тогда боковые блоки опустятся вниз, и угол α уменьшится. Поэтому уменьшится и равновесное значение массы m, из чего следует, что при случайном поднятии груза m он будет возвращаться в прежнее положение. Опускание груза m рассматривается аналогично. Следовательно, равновесие действительно будет устойчивым.

Рассмотрение устойчивости с точки зрения минимума П. энергии осложнено необходимостью учитывать *непостоянство длины нитки* (ее накручивание на боковые блоки).