

Задачи и решения 2 тур

1. Для натуральных чисел a, b, c выполнено равенство $\text{НОД}(a,b) + \text{НОК}(a,b) = \text{НОД}(a,c) + \text{НОК}(a,c)$. Докажите, что $a = b$.

Решение: Сгруппируем НОД и НОК: $\text{НОД}(a,b) - \text{НОД}(a,c) = \text{НОК}(a,c) - \text{НОК}(a,b)$. Правая часть равенства делится на a , так как и $\text{НОК}(a,c)$, и $\text{НОК}(a,b)$ делятся на a . Значит, и левая часть равенства должна делиться на a . $\text{НОД}(a, b)$ всегда не меньше 1 и не больше a , поэтому левая часть точно меньше a . Получается, чтобы слева было число, кратное a , оно может быть равно только нулю. Получаем, что и слева, и справа стоят нули. Значит, $\text{НОД}(a,b) = \text{НОД}(a,c)$ и $\text{НОК}(a,c) = \text{НОК}(a,b)$. Используем теперь тождество $\text{НОД}(a,b) \cdot \text{НОК}(a,b) = ab$. Тогда и $\text{НОД}(a,c) \cdot \text{НОК}(a,c) = ac$. Левые части, как было доказано выше, равны. Значит и правые тоже равны. Поскольку a не равно нулю, то $b=c$.

2.

Назовем натуральное число n полезным, если любое натуральное число, большее 2 и меньшее n , можно представить в виде суммы нескольких различных делителей n . Докажите, что произведение двух полезных чисел – полезное число.

Решение. Пусть $c = ab$, где a и b – полезные числа. Возьмем любое число d , меньшее c и поделим его с остатком на a : $d = aq + r$. Число q меньше b . Поэтому его можно представить в виде суммы различных делителей числа b : $d = b_1 + b_2 + \dots + b_k$. Умножим эту сумму на a : $ad = ab_1 + ab_2 + \dots + ab_k$. Каждое слагаемое в полученной сумме является делителем произведения ab , при этом каждое слагаемое не меньше a , и все слагаемые различны. Остаток r меньше числа a , поэтому его можно представить в виде суммы различных делителей числа a , меньших a . Поскольку делители числа a являются также и делителями числа ab , мы представили число d нужным образом. При этом мы проверили, что все делители, которые входят в сумму, различны.

3.

В таблице размером 27×37 клеток расставили числа от 1 до 999 (каждое – по одному разу). После этого нашли суммы чисел по всем вертикалям и всем горизонталям. Из получившихся 64 сумм выбрали те, которые делятся на 4. Может ли их сумма быть втрое меньше суммы остальных сумм?

Ответ: Нет. **Решение.** Пусть сумма всех сумм, делящихся на 4, равна A . Тогда сумма всех остальных сумм равна $3A$, а сумма всех 64 сумм – $4A$. Поскольку A делится на 4, сумма всех сумм делится на 16. Но в этой сумме все числа таблицы учтены ровно по два раза (по столбцу и по строке). Поэтому она равна $2 \times (1+2+\dots+999) = 999 \times 1000$, а это число на 16 не делится. Противоречие.

4. В двух мешках расположены кубики трёх цветов (белые, красные и синие). Известно, что при вытаскивании любых трёх кубиков из первого мешка среди вынутых наверняка найдётся синий. А если вытащить 4 кубика из второго мешка, то

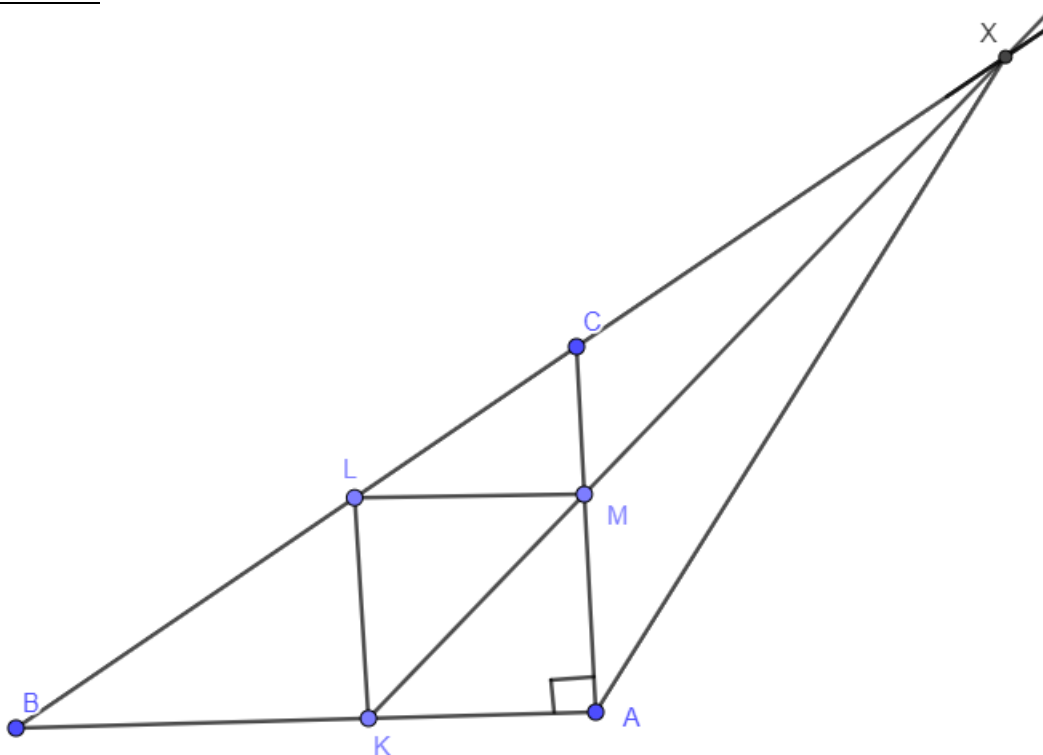
наверняка среди них будет красный. Если вытащить любые пять кубиков из мешков, то наверняка попадётся белый. Какого максимальное число кубиков в двух мешках?

Ответ: 9

Решение: В первом мешке не более двух (3-1) не синих кубиков, во втором – не более 3 (4-1) не красных. Всего в двух мешках не более 4 (5-1) не белых кубиков. Сумму кубиков в двух мешках можно представить как сумму синих и не синих в первом мешке и сумму красных и не красных во втором: $(\overline{c1} + c1) + (\overline{k2} + k2) \leq 2 + 3 + c1 + k2 \leq 2 + 3 + 4 = 9$. Таким образом, мы получили верхнюю оценку искомой величины. Для неё нетрудно подобрать пример. Если не белых 4, то белых – 5. Получается, что два из них будут в первом мешке, а три во втором. Тогда в первом нет красных, а во втором – синих. В первом мешке может быть 1(2) синих, а втором 3 (2) красных.

5. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC с прямым углом A отмечены точки K , L и M соответственно такие, что $AKLM$ – квадрат. Лучи KM и BC пересекаются в точке X . Докажите, что $\angle XAC = \angle ABC$.

Решение.



Заметим, что $\angle AMX = \angle LMX = 135^\circ$, следовательно треугольники AMX и LMX равны. Тогда $\angle AXM = \angle LXM$. Но поскольку внешний угол треугольника равен сумме внутренних, несмежных с ним, $\angle XAC = \angle AMK - \angle AXM = \angle XKA - \angle KXL = \angle ABC$.

6. На доске написаны целые числа 1, 2, 3, 4 и 5. Разрешается стереть два числа a и b и заменить их на $a+b$ и ab . Можно ли, повторяя эту процедуру, получить ситуацию, где три из пяти чисел на доске равны 2025?

Ответ. Нет.

Решение. За каждый ход два числа заменяются на два больших числа (кроме случая, когда стирается число 1). Изначально на доске написаны три нечётных числа. Если заменить два нечётных числа, количество нечетных уменьшится. Если заменить числа, не являющиеся оба нечётными, количество нечётных сохранится. Чтобы получить три числа 2025, нельзя ни на каком шаге заменять два нечётных числа, иначе число нечетных чисел уменьшится. Следовательно, 2025 может появиться только как сумма $a+b$. При первом ходе, создающем число 2025, нужно выбрать числа a и b так, чтобы $2025 = a+b$, тогда либо $ab > 2025$, либо $ab = 2024$ ($b=1$). Если $ab = 2024$, один из множителей равен 1, и 1 исчезает с доски. Числа 2025 и ab , появившиеся при создании первого 2025, нельзя использовать для создания следующих двух 2025. Следующее число 2025 можно получить только как $c + d = 2025$, при этом $cd > 2025$ или $cd = 2024$. В последнем случае 1 снова исчезнет. Числа $c+d=2025$ и cd также нельзя использовать для получения третьего 2025. Последнее число 2025 невозможно получить, так как имеющиеся на доске числа уже нельзя использовать для его создания.

Для лиги С.

2. Произведение какого наименьшего числа любых подряд идущих нечётных натуральных чисел наверняка кратно 45?

Ответ: 6.

Решение. $45=5 \cdot 9$. Нужно доказать, что последовательность чисел кратна 5 и 9. Каждое пятое последовательное нечётное число делится на 5. Каждое третье последовательное нечётное число делится на 3, поэтому в 5 последовательных числах может быть только одно число, кратное 3 (например: 11, 13, 15, 17, 19). Поэтому далее будем проверять 6 подряд идущих нечётных натуральных чисел (обозначим их за $n, n+2, n+4, n+6, n+8, n+10$). Формально кратность 9 6 последовательных нечётных чисел можно продемонстрировать через остатки.

В каждой строке есть по два нуля в остатках, то есть по два числа в произведении делятся на 3, то есть всё произведение делится на 9.

n	$n+2$	$n+4$	$n+6$	$n+8$	$n+10$
0	2	1	0	2	1
1	0	2	1	0	2
2	1	0	2	1	0

Для лиги В

2. Решить уравнение $x! + y! = 10x + 9$ в натуральных числах.

Ответ: пустое множество.

Решение.

В правой части нечетное число, поэтому хотя бы одно из двух чисел равно 1.

Пусть $x=1$. Тогда $y! = 18$ и решений нет. Пусть $y=1$. Тогда $x = 10x + 8$, правая часть не делится на 5, поэтому рассмотрим числа, меньшие 5, для них решений нет.