

Задачи 1 тура

1. Доказать, что при любых вещественных числах a, b, c верно неравенство $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$.

Решение.

Сложим неравенства.

$$a^2 + b^2c^2 \geq 2abc$$

$$b^2 + a^2c^2 \geq 2abc$$

$$c^2 + a^2b^2 \geq 2abc$$

Сложим эти неравенства и получим: $a^2 + b^2c^2 + b^2 + a^2c^2 + c^2 + a^2b^2 \geq 6abc$

То есть $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$.

2. Доказать, что если $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$, где a, b, c – попарно различные и отличные от нуля числа, то $\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$.

Решение.

Перепишем условие задачи в виде

$$\frac{y+z}{\frac{1}{a}} = \frac{x+z}{\frac{1}{b}} = \frac{x+y}{\frac{1}{c}}$$

Воспользуемся тем, что если $\frac{p}{q} = \frac{u}{v}$ причем $q \neq 0, v \neq 0, q - v \neq 0$, то имеет место равенство: $\frac{p}{q} = \frac{u}{v} = \frac{p-u}{q-v}$.

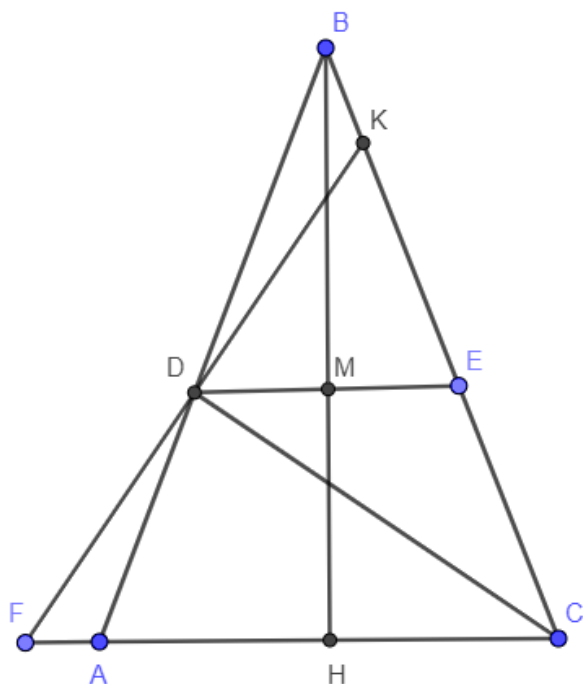
Тогда из написанной выше цепочки равенств следует, что

$$\frac{\frac{y+z}{\frac{1}{a}} - \frac{x+z}{\frac{1}{b}}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}} = \frac{\frac{x+z}{\frac{1}{b}} - \frac{x+y}{\frac{1}{c}}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}} = \frac{\frac{x+y}{\frac{1}{c}} - \frac{y+z}{\frac{1}{a}}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$$

Или $\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD треугольника, где D – точка на боковой стороне AB . Из точки D проведены прямые $DF \perp DC$ и $DE \parallel AC$, причем точка F принадлежит основанию треугольника или его продолжению, а E лежит на BC . Биссектриса угла B пересекает прямую DE в точке M . Доказать, что $DM = \frac{FC}{4}$.

Решение.



Продолжим отрезок FD до пересечения с BC в точке K. Прямоугольные треугольники CDF и CDK равны, так как у них общий катет CD и по острому углу при вершине C (CD – биссектриса). Из равенства этих треугольников следует, что $DK=FD$, поэтому $DE = FC/2$ как средняя линия треугольника FKC. Далее, легко заметить, что $DM = DE/2$, откуда получаем $DM = FC/4$.

4. Докажите, что для любого натурального n произведение $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1) \dots (x_n^2 + 1)$ представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

Решение. Для $n=1$ $P_1 = (x_1^2 + 1) = x_1^2 + 1^2$ (выполнено). $P_{n+1} = P_n(x_{n+1}^2 + 1) = (a^2 + b^2)(x_{n+1}^2 + 1) = a^2x_{n+1}^2 + a^2 + b^2 + b^2x_{n+1}^2 = a^2x_{n+1}^2 + 2abx_{n+1} + b^2 + a^2 - 2abx_{n+1} + b^2x_{n+1}^2 = (ax_{n+1} + b)^2 + (bx_{n+1} - a)^2$. Доказали по индукции. P_n разложили как сумму квадратов (принимая, как данное), а далее пришли для P_{n+1} также к сумме двух полных натуральных квадратов.

5. Учитель записал на доске все подряд идущие натуральные числа от 1 до 20002. Можно ли распределить все эти числа на две равные по количеству группы, чтобы сумма всех чисел в одной группе была кратна сумме всех чисел в другой?

Ответ: нет.

Решение. Назовём группу с бОльшей суммой как «большие (Б)», а вторую «меньшие (М)». Оценим максимальную разницу между суммой «больших» и «меньших». Обозначим 20002 за $2n$. У нас чётное количество всего чисел, причём количество чётных и нечётных одинаково. Наименьшая сумма М возможна, когда они идут подряд от наименьшего числа (1, 2, ..., n). Их сумма равна $n(n+1)/2$. Можно получить через сумму арифметической прогрессии или через попарное сложение $(1+(n-1)) + (2+(n-2)) + (3+(n-3)) \dots + n$. У нас нечётное количество чисел в последовательности (1,

2, ..., $n=1001$), поэтому мы получим $(n-1)/2$ пар с суммой n и само число n , то есть $n(n+1)/2$. Аналогично, сумма всех $2n$ чисел равна $2n(2n+1)/2$. Значит сумма B равна разности всех чисел и M : $B=2n(2n+1)/2 - n(n+1)/2 = n(3n+1)/2$.

$B=n(3n+1)/2$. Это число должно быть кратно $n(n+1)/2$. Они отличаются скобкой, которая для B больше менее чем в 3 раза, так как $B=n(3n+1)/2 < n(3n+3)/2=3A$. То есть B/A равно либо 2, либо 1.

Рассмотрим эти два случая отдельно. Если суммы равны, то их сумма чётна, то есть чётна сумма всех чисел, а она равна $2n(2n+1)/2=n(2n+1)$, то есть нечётна для нашего нечётного n .

Если B в 2 раза больше, чем A , то общая сумма равна $A+2A=3A$, то есть кратна трём, но общая сумма равна $n(2n+1)$, но и n (10001), и $2n+1$ (20003) не кратны 3, так как суммы их цифр не кратны 3. Противоречие.

6. Для любого набора чисел назовём число медианой, если после упорядочивания этого набора по возрастанию оно будет стоять посередине набора для нечётного количества чисел в наборе или будет равно полусумме двух чисел в середине набора для чётного количества чисел.

Руслан записывает число на чистой доске, а Ратибор записывает к себе в тетрадку медиану всех чисел с доски. В тетради Ратибора были зафиксированы числа 7, 5, 3 и 4. Докажите, что число, которое было записано Русланом 4-м по счёту, может быть равно только 5.

Решение: Сначала Руслан записал одно число, на что Ратибор записал 7. Значит и Руслан записал 7. После записи второго числа на доске их стало два, то есть чётное количество, поэтому медиана считается, как полусумма. 5 является полусуммой 7 и 3. Значит, второе число Руслана – 3. Для трёх чисел на доске Руслана медиана будет посередине после упорядочивания чисел на доске по возрастанию. Тройка может быть таким числом только если на доске будет выписано число, не превышающее 3. Итого на доске уже три числа 7, 3, $x \leq 3$. Их можно упорядочить: $x \leq 3$, 3, 7. После добавления 4-го числа медиана получилась 4. Если новое число будет не меньше 7, то медиана будет равна 5. Если не больше 3, то медиана не превзойдёт 3. Поэтому число должно быть между 3 и 7. 4 является полусуммой только 3 и 5. Значит, Руслан записал 4-м по счёту число 5.

Для лиги С

5. Можно ли выписать 15 подряд идущих целых чисел так, чтобы сумма четырёх наименьших была равна сумме остальных? Ответ: нельзя.

Решение: Согласно условию $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=(x+4)+(x+5)+\dots+(x+14)$, что эквивалентно $4x+6=11x+99$ или $7x=-93$. В целых числах это уравнение не решается.