ГБУ ДО Центр «Интеллект»
Олимпиада по математике, 6 класс
2024 г.

1. Алина загадала число и прибавила к нему сумму его цифр. В результате у нее получилось 11022024. Приведите пример загаданного числа.

2. Умный лисенок захотел составить фигуру, изображенную на рис. 1, используя фигурки трех типов, таких как на рис. 2. Удастся ли ему это сделать, если фигурки можно переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга? Использовать каждый тип не обязательно.

3. Как известно, на острове Невезения всего три деревни. В первой живут рыцари, которые всегда говорят правду; во второй — лжецы, которые всегда лгут; а в третьей — конформисты. Конформист говорит правду, если хотя бы один его сосед рыцарь и врет, если оба его соседа лжецы. Во всех остальных случаях конформист может как соврать, так и сказать правду.
   Как-то раз за круглым столом собрались четыре жителя острова Невезения. Каждый из них заявил: «Мой сосед справа — лжец». Сколько рыцарей могло быть за столом, если известно, что за столом нет трех человек из одной деревни?

4. Клетчатый прямоугольник 20×24, разрезали по линиям сетки на несколько клетчатых прямоугольников одинакового периметра. Оказалось, что суммарная длина всех разрезов равна 120. Могло ли количество полученных прямоугольников быть равно 18? Если да, то найдите периметр такого прямоугольника.

5. Андрей, Боря и Ваня каждый сезон (весной, летом, осенью и зимой) соревнуются, кто из них быстрее. Тренер каждый раз записывает победителя в свой блокнот. Он также заметил, что Андрей никогда не выигрывает два забега подряд. А Боря зимой всегда болеет, поэтому не имеет шансов победить в последнем соревновании. Сколько вариантов списка мог получить тренер после года наблюдений?

6. В некоторой стране алфавит состоит всего из 5 букв a, b, c, d, e. Известно, что в стране очень строгие правила правописания — все содержащиеся в слове упорядоченные пары букв имеют вид: $ab, ac, ad, ba, be, cc, cd, da, de, eb, ed$.
   Петя хочет придумать себе памятку — слово, в котором каждая такая пара встречается ровно 1 раз. Получится ли у него это сделать?

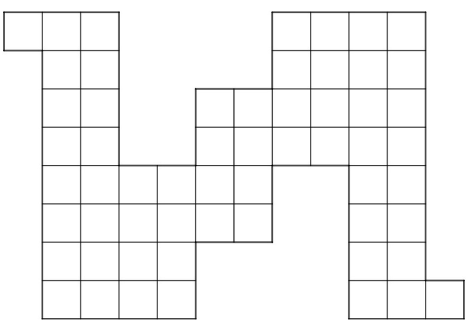


Рис. 1.

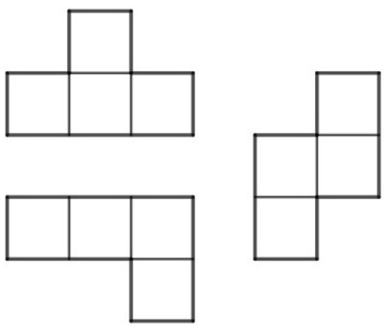


Рис. 2.

ГБУ ДО Центр «Интеллект»
Олимпиада по математике, 6 класс
2024 г.
Решения и критерии проверки

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно .

Общие критерии оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. Алина загадала число и прибавила к нему сумму его цифр. В результате у нее получилось 11022024. Приведите пример загаданного числа. (*А.Шавалиева*)

   Ответ: 11022009.

   Решение. $11022009 + 1 + 1 + 0 + 2 + 2 + 0 + 0 + 9 = 11022024$.

   Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов.

2. Умный лисенок захотел составить фигуру, изображенную на рис. 1, используя фигурки трех типов, таких как на рис. 2. Удастся ли ему это сделать, если фигурки можно переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга? Использовать каждый тип не обязательно. (*Э.Минько*)

   Ответ: Нет, не удастся.

   Решение. Заметим, что фигура (рис. 1) состоит из 58 клеток, а каждый тип фигурок из 4. То есть общая площадь покрытая фикурками всегда будет делиться на 4, вне зависимости от их количества. Но 58 на 4 не делится, следовательно, лисенку не удастся составить фигуру.

   Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. В явном виде не сказано, что площадь любой фигуры, составленной из маленьких фигурок, всегда должна делиться на 4 — не более 5 баллов.

3. Как известно, на острове Невезения всего три деревни. В первой живут рыцари, которые всегда говорят правду; во второй — лжецы, которые всегда лгут; а в третьей — конформисты. Конформист говорит правду, если хотя бы один его сосед рыцарь и врет, если оба его соседа лжецы. Во всех остальных случаях конформист может как соврать, так и сказать правду.
Как-то раз за круглым столом собрались четыре жителя острова Невезения. Каждый из них заявил: «Мой сосед справа — лжец». Сколько рыцарей могло быть за столом, если известно, что за столом нет трех человек из одной деревни?
(*П.Цишевич*)

Ответ: 2.

Решение. Допустим, что за столом нет ни одного лжеца. Тогда там не может быть и рыцарей, так как справа от рыцаря обязательно сидел бы лжец. Тогда за столом четыре конформиста, но этого не может быть по условию.
Значит, за столом сидит хотя бы один лжец. Так как он лжет, то справа от него сидит либо конформист, либо рыцарь. Рассмотрим эти два случая:

a) Справа сидит конформист (ЛК). Справа от конформиста никогда не может сидеть рыцарь, так как в таком случае конформист соврет. Однако, если у конформиста есть сосед-рыцарь, то конформист обязан говорить правду.
Теперь предположим, что справа от конформиста сидит лжец. Тогда конформист сказал правду. Однако, он будет сидеть между двумя лжецами, поэтому должен был соврать.
Получается справа от конформиста сидит еще один конформист (ЛКК). Посмотрим, кем мог оказаться четвертый человек. Он не может быть рыцарем (доказано выше), он не может быть конформистом (иначе за столом окажется три конформиста), следовательно, он лжец. Но тогда этот лжец скажет правду, поскольку справа от него действительно сидит лжец. Противоречие. Значит, этот случай невозможен.

b) Справа сидит рыцарь (ЛР). Тогда, однозначно, правее рыцаря сидит еще один лжец (ЛРЛ).
Посмотрим, кем мог оказаться четвертый человек. Он не может быть лжецом (иначе за столом окажется три лжеца), он не может быть конформистом (иначе конформист скажет правду, находясь между двумя лжецами), значит, он рыцарь.

Получается, что рассадка ЛРЛР является единственной возможной, которая полностью удовлетворяет условиям задачи. В этом случае, за столом сидят два рыцаря.

Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Полностью разобран случай, когда за столом сидит хотя бы один рыцарь — 4 балла. Приведен вариант верной рассадки, при которой за столом окажется 2 рыцаря — 2 балла. Только верный ответ — 0 баллов.

4. Клетчатый прямоугольник 20×24, разрезали по линиям сетки на несколько клетчатых прямоугольников одинакового периметра. Оказалось, что суммарная длина

всех разрезов равна 120. Могло ли количество полученных прямоугольников быть равно 18? Если да, то найдите периметр такого прямоугольника. (*А.Бечина*)

Ответ: Нет.

Решение. Пусть могло получится ровно 18 прямоугольников одинакового периметра. Пусть периметр одного из них равен P. Тогда суммарный периметр всех таких прямоугольников равен $18P$. Суммарный периметр всех маленьких прямоугольников состоит из периметра большого прямоугольника и удвоенной суммарной длины всех разрезов. Тогда получаем

$$88 + 240 = 18P$$

$$328 = 18P$$

$$164 = 9P$$

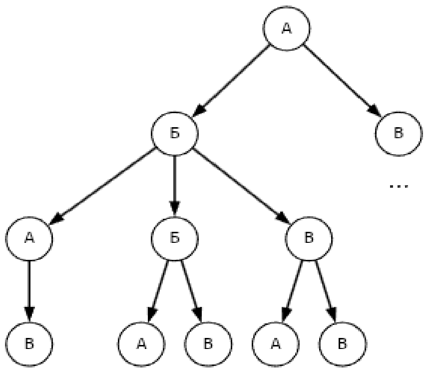
164 не делится на 9, следовательно не могло.

Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов.

5. Андрей, Боря и Ваня каждый сезон (весной, летом, осенью и зимой) соревнуются, кто из них быстрее. Тренер каждый раз записывает победителя в свой блокнот. Он также заметил, что Андрей никогда не выигрывает два забега подряд. А Боря зимой всегда болеет, поэтому не имеет шансов победить в последнем соревновании. Сколько вариантов списка мог получить тренер после года наблюдений? (*М.Стеблий*)

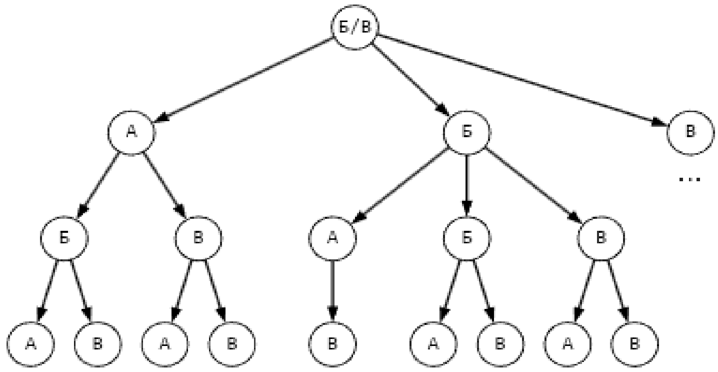
Ответ: 38.

Решение. Назовем наших участников А, Б и В. Причем А не выигрывает два забега подряд, а Б не выигрывает последней. Сначала рассмотрим случай, когда А выигрывает первый забег. Очевидно, что поддеревья, соответствующие выигрышам Б и В во втором забеге одинаковые, поэтому рассмотрим лишь одно из них.



Итого 10 вариантов.

Теперь рассмотрим случай, где первый забег выигрывает Б (для выигрыша В разбирается аналогично).



Итого 14 вариантов. Тогда и для выигрыша В — 14 вариантов.

Таким образом ответ равен $10 + 14 + 14 = 38$.

Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов. Верный ответ, с пояснением, как осуществлялся перебор, без предъявления самого перебора — не более 2 баллов. Только ответ — 0 баллов.

6. В некоторой стране алфавит состоит всего из 5 букв a, b, c, d, e. Известно, что в стране очень строгие правила правописания — все содержащиеся в слове упорядоченные пары букв имеют вид: $ab, ac, ad, ba, be, cc, cd, da, de, eb, ed$.
Петя хочет придумать себе памятку — слово, в котором каждая такая пара встречается ровно 1 раз. Получится ли у него это сделать? (*М.Стеблий*)

Ответ: Да, получится.

Решение 1. Допустим, что такое слово есть. Будем называть слогом любую разрешенную упорядоченную пару букв. Заметим, что если буква не стоит в самом начале или конце этого слова, то в этом месте она участвует ровно в двух слогах, в одном из которых она стоит в начале, а в другом — в конце. Буквы могут встречаться не по одному разу, тогда можно понять, что для каждой буквы, которая не стоит в конце или начале, все слоги можно разбить на пары. У начальной же буквы без пары останется слог, где эта буква стоит первой, для последней — слог, где эта буква стоит второй. Тогда найдем претендентов на место первой и последней букв. Первой буквой может быть только a, а последней — только d. Далее построим пример, исходя из полученных правил. Одно из подходящих слов : $abaccdadebed$.

Решение 2. Построим ориентированный граф где вершины соответствуют буквам, а ребра — правилам (например, для пары ab ориентированное ребро идет из вершины a в вершину b). Таким образом, для решения задачи нужно найти Эйлеров путь (путь, который проходит по каждому ребру ровно по одному разу) в построенном графе. Полученный граф подходит под условия в теореме Эйлера, а, значит, в нем есть эйлеров путь. То есть у Пети получится придумать такое слово.

Критерии оценивания. Верное решение — 7 баллов.