Решения задач математического турнира «Шаг в математику»

Решения 1$^{\underline{й}}$ командной олимпиады.

1.

Ответ: 27. Решение: число является кубом, поскольку каждое простое число входит в его разложение в степени, кратной 3. Осталось проверить числа 27 и 64.

2.

Ясно, что все эти числа равны ±1. Сумма может равняться нулю, только если единиц и минус единиц поровну – по 41. Но тогда их произведение равнялось бы –1.

3.

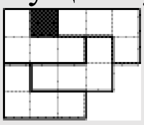
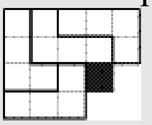
Первый множитель может принимать значения –7, – 1, 1, 7. Второй – соответственно значения 1, 7, – 7, 1.

Ответ

(4, –9), (–4, 9), (20, –33), (–20, 33).

4.

Существует много различных решений. На рисунке приведены два из них.

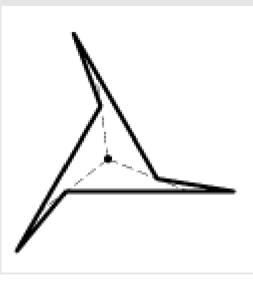
5.

Среди чисел 1, 2, ..., 99 есть 50 нечётных и 49 чётных. Рассмотрим 50 карточек, на которых написаны нечётные числа. На обратной стороне по крайней мере одной из этих карточек написано нечётное число, поэтому сумма стоящих на ней чисел чётна.

6.

Да, может.

См. рисунок.



Решения 2$^{\underline{й}}$ командной олимпиады

1. Можно.

Первым взвешиванием отвесим 1 грамм песка,

вторым взвешиванием на одну чашу ставим гирьку и 1 г песка, на второй чаше отвесим 2 г песка,

третьим взвешиванием на одну чашу ставим гирьку и 3 г песка (2+1), на второй чаше отвесим 4 г песка, и так далее

взвешиванием номер n на первой чаше будет гирька и $2^{n-1} - 1$ граммов песка (разделенных на серии $1 + 2 + \ldots + 2^{n-2}$), на второй чаше 2^{n-1} граммов песка.

После десятого взвешивания на первой чаше будет 511 граммов песка (отдельно 1, 2, 4, … 256 граммов) и гирька, на второй чаше 512 граммов песка.

$1 + 2 + 4 + \ldots + 512 = 1023$, поэтому возьмём все числа, кроме 16, 4, 2, 1. $16 + 4 + 2 + 1 = 23$, поэтому сумма оставшихся чисел равна 1000.

2.

Умножив обе части равенства $a + {}^{b}/_{c} = 1$ на c, получим $ac + b = c$, откуда $ac = c - b$. Аналогично $ba = a - c$ и $cb = b - a$. Значит,
$ab + bc + ca = (a - c) + (b - a) + (c - b) = 0$.

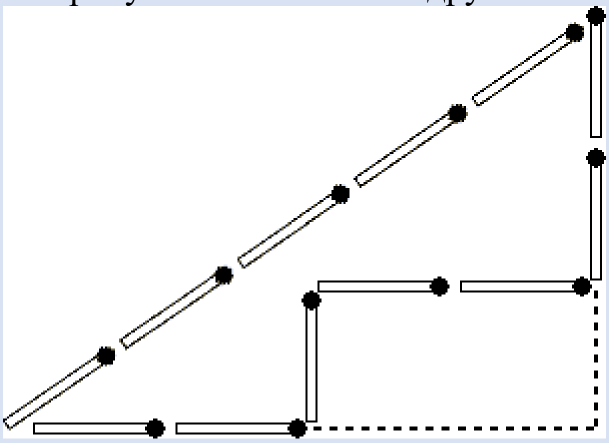
3.

Можно.

На кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расставим числа следующим образом:
$AB - 10$, $BC - 5$, $CD - 7$, $AD - 4$,
$A_1B_1 - 3$, $B_1C_1 - 9$, $C_1D_1 - 6$, $A_1D_1 - 8$,
$AA_1 - 2$, $BB_1 - 11$, $CC_1 - 1$, $DD_1 - 12$.
На каждой грани куба сумма чисел равна 26.

4.

Решение задачи показано на рисунке. Возможны и другие конструкции.



5.

Не может.

Так как на каждую стену уходит краски больше, чем на пол, то площадь пола меньше, чем площадь каждой из стен. Это значит, что как длина, так и ширина комнаты меньше её высоты, то есть меньше, чем 3 м. Аналогично и ширина комнаты меньше, чем 3 м. Поэтому площадь комнаты даже меньше 9 м².

6.

Деление: $(a☆b)☆1 = 1 – ((a☆b) : 1) = 1 – (1 – a : b) = a : b$.

Умножение: $ab = a : (1 : b) = a : ((1☆b)☆1) = (a☆((1☆b)☆1))☆1$.

Вычитание: $a – b = (b☆a)\cdot a = ((b☆a)☆((1☆a)☆1))☆1$.

Сложение: $a + b = a – (0 – b)$.

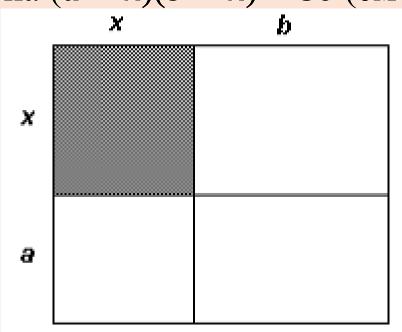
Решения. Матбой номер 1

1.

Расположим числа в порядке возрастания. Тогда очевидно, что каждое число будет больше своего номера. Найдем сумму номеров всех чисел: 1 + 2 + … + 100 = 5050. Эта сумма на единицу меньше суммы самих чисел. Значит, одно число на единицу больше своего номера, а остальные — равны ему. Числом, большим своего номера, может быть только последнее. Действительно, если какое-то число больше своего номера, то все последующие числа тоже больше своего номера. Поэтому искомыми числами будут 1, 2, …, 99, 101.

2.

Введем обозначения так, как показано на рисунке. Выразим половины периметров прямоугольников, указанных в условии: $a + x = 8$ и $b + x = 10$. Тогда площадь исходного прямоугольника равна $(a + x)(b + x) = 80$ (см^2).



3.

Пусть x - доля правдивых жителей. Рассмотрим другой круг, в котором все лжецы станут правдивыми, а все правдивые - лжецами; в нем доля правдивых равна $1 - x$. В этом круге путешественник услышит то же самое, поскольку правдивость любого жителя изменилась, но изменилась и правдивость соседа, о котором он говорит. Поскольку путешественник сумел на основании полученных ответов найти долю правдивых жителей, эта доля в обоих кругах одинакова. Следовательно, она равна 1/2.

4.

Оценка. Число фишек на каждой вертикали кратно 3, значит, их не больше 6, а на всей доске – не более 48.

Пример: 32 белые фишки ставим на белые поля, а 16 чёрных - вдоль главной "чёрной" диагонали и вдоль двух параллельных диагоналей "длины" 4.

Ответ

48 фишек.

5.

Нельзя.

В квадрате 6×6, разбитом на единичные клетки, имеется пять горизонтальных и пять вертикальных "швов". Эти "швы" являются потенциальными "швами" при разбиении квадрата на доминошки. Заметим, что если потенциальный "шов" пересекает ровно одну доминошку, то при удалении этой доминошки доска будет разделена этим "швом" на две части с нечётным числом клеток, каждая из которых разбита на доминошки, что невозможно. Таким образом, если потенциальный "шов" пересекает какую-нибудь доминошку, то он пересекает и вторую. Каждая плитка пересекается ровно одним потенциальным "швом", поэтому, чтобы "заблокировать" все 10 потенциальных швов, потребуется не менее 20 доминошек. Но доминошек только 18, один из потенциальных "швов" не будет заблокирован.

6.

Для удобства введем на прямой координаты. Пусть точки -1 и 1 покрашены в один цвет. Тогда 3 и -3 — другого цвета (иначе искомый отрезок - соответственно, [-3; 1] или [-1; 3]). Тогда, в зависимости от цвета 0, либо отрезок [-1,1], либо [-3,3] удовлетворяет условию.

Решения. Матбой номер 2

1.

Решение

Например, при $a = c = 1$, $b = 2$ первое равенство выполняется, а второе – нет.

Ответ

Не следует.

2.

Частота встреч обратно пропорциональна скорости отца относительно сына. Поэтому условие означает, что сумма S скоростей отца и сына в 5 раз больше разности R этих скоростей. Разделив удвоенную скорость отца $S + R$ на удвоенную скорость сына $S - R$ получим отношение их скоростей: $\frac{5+1}{5-1} = 1,5$.

Ответ

В 1,5 раза.

3.

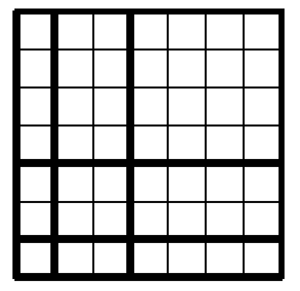
Ответ: верно.

Такое произведение можно записать в виде $n(n + 1) = n^2 + n$. Приписав 25, получим $100n^2 + 100n + 25 = (10n + 5)^2$.

4.

Разрежем квадрат на три "узких" прямоугольника (1×1, 2×1 и 4×1), три "средних" (1×2, 2×2 и 4×2) и три "широких" (1×4, 2×4 и 4×4).

Из "узких" прямоугольников можно сложить прямоугольник любой высоты от 1 до 7 и ширины 1. Аналогично из "средних" прямоугольников можно сложить прямоугольник любой высоты от 1 до 7 и ширины 2, а из "широких" – прямоугольник любой высоты от 1 до 7 и ширины 4. Из полученных "узкого", "среднего" и "широкого" прямоугольников нужной высоты можно сложить прямоугольник этой высоты и любой ширины от 1 до 7.



5.

Пусть d = НОД(a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b, $a = du$, $b = dv$.

Сокращая на d^2, получим, что $u^2 + v^2$ делится на uv.

Но НОД($u^2 + v^2$, uv) = 1, так как u и v взаимно просты. Следовательно, $uv = 1$.

Значит, $u = v = 1$, $a = b = d$.

6.

Обозначим числа через a_1, a_2, ... , a_{20} в порядке возрастания, таким образом $a_1<a_2<...<a_{20}$. Допустим, что условие задачи не выполняется. Тогда среди 19 разностей $d_1=a_2-a_1$, $d_2=a_3-a_2$, ... , $d_{19}=a_{20}-a_{19}$ не больше трех разностей принимают значение 1, не больше трех разностей принимают значение 2, и т.д. Отсюда можно сделать вывод о том, что сумма всех 19 разностей $d_1+d_2+...+d_{19} = a_{20}-a_1$ не меньше, чем $(1+1+1)+(2+2+2)+(3+3+3)+(4+4+4)+(5+5+5)+(6+6+6)+7=70$. Однако разность $a_{20}-a_1$, очевидно, меньше 70, так как числа a_{20} и a_1 - натуральные, меньшие 70. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения задачи.

Решения. Матбой номер 3

1.

Например, из палочек длины 1, 2, 3 составим две стороны длины 3, а остальные спички разобьём на 48 пар с суммой длин 103:
$\{4, 99\}$, $\{5, 98\}$, ..., $\{51, 52\}$ и составим из них две стороны длины $24\cdot 103 = 2472$.

Ответ

Можно.

2.

Пусть a – первая цифра числа X, а b – вторая. Первая цифра числа Y меньше a, поэтому она равна $|a - b|$, а вторая цифра равна $a + b$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Разберём 2 случая.
1) $10a + b = 20(a - b) + 2(a + b)$. Тогда $12a = 19b$, что невозможно: a не делится на 19.
2) $10a + b = 20(b - a) + 2(a + b)$. Тогда $28a = 21b$, то есть $4a = 3b$, и осталось проверить числа 68 и 34.

Второй способ. Сравнивая последние цифры чисел X и Y, заметим, что $2(a + b) \equiv b \pmod{10}$. Значит, $2a + b$ кратно 10. Поскольку $a + b < 10$, то $2a + b = 10$. Осталось проверить числа 18, 26, 34, 42, 50.

Ответ

34 и 17.

3.

Так как каждый из школьников (кроме Вани) занял место хуже, чем ожидал, то первое место не занял никто из них. Следовательно, первое место занял Ваня.

Ответ

Первое место.

4.

Поскольку от каждой клетки до любой другой можно добраться, не более 19 раз сдвинувшись в соседнюю клетку, то все числа находятся между числами a и $a + 95$, где a – минимальное из всех расставленных чисел. Значит, среди этих чисел не более 96 различных.

5.

Ответ

5 столбцов.

Приведём один из возможных примеров (см. таблицу). Сумма чисел в каждой из трёх верхних строк положительна, а сумма чисел в каждом столбце отрицательна.

1	1	1	–1	–1
1	–1	1	–1	1
–1	1	–1	1	1
–1	–1	–1	–1	–1
–1	–1	–1	–1	–1

6.

Пусть через одну из отмеченных точек A проходит не более десяти красных прямых. На этих прямых лежат, не считая A, 100 отмеченных точек. Значит, на одной из этих прямых l лежит не менее десяти из них. Вместе с A, прямая l содержит по крайней мере 11 отмеченных точек. Рассмотрим точку B, не лежащую на l. Она соединена красными прямыми с 11 отмеченными точками, лежащими на l.