Командная олимпиада

1. 2 балла За контрольную работу каждый из 25 школьников получил одну из оценок "3", "4" или "5". Насколько больше было пятёрок, чем троек, если сумма всех оценок равна 106?

2. 2 балла Произведение пяти чисел не равно нулю. Каждое из этих чисел уменьшили на единицу, при этом их произведение не изменилось. Приведите пример таких чисел.

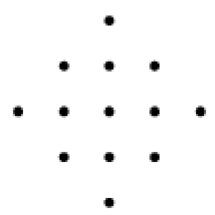
3. 3 балла Улитка в течение 9 минут часть времени ползла, часть времени отдыхала. За каждую отдельно взятые 2 минуты подряд она проползла 20 см. Следует ли из этого, что за 9 минут она проползла 90 сантиметров? Ответ обосновать.

4. 3 балла Можно ли в центры 16 клеток шахматной доски 8×8 вбить гвозди так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?

5. 2 балла Дан куб с ребром 2. Покажите, как наклеить на него без наложений 10 квадратов со стороной 1 так, чтобы никакие квадраты не граничили по отрезку (по стороне или её части). Перегибать квадраты нельзя.

6. 3 балла Можно ли расставить на листе клетчатой бумаги крестики и нолики так, чтобы ни на одной горизонтали, вертикали и диагонали нельзя было встретить три одинаковых знака подряд?

7. 4 балла Зачеркните все 13 точек на рисунке пятью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды.



8. 4 балла Петя записал 25 чисел в клетки квадрата 5×5. Известно, что их сумма равна 500. Вася может попросить его назвать сумму чисел в любой клетке и всех её соседях по стороне. Может ли Вася за несколько таких вопросов узнать, какое число записано в центральной клетке?

9. 4 балла Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая команда сыграла с каждой один раз). Доказать, что можно выделить такие четыре команды A, B, C и D, что A выиграла у B, C и D; B выиграла у C и D, C выиграла у D.

10. 3 балла Школьник сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он решил пробежать вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 150 ступенек. Сколько ступенек он насчитал, спускаясь вместе с задержавшим его сотрудником метрополитена по неподвижному эскалатору?

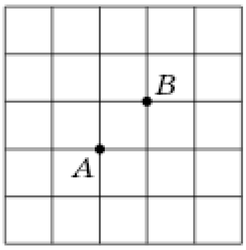
Матбой номер 1

1. n рыцарей из двух враждующих стран сидят за круглым столом. Число пар соседей-друзей равно числу пар соседей-врагов.
Доказать, что n делится на 4.

2. На сколько равных восьмиугольников можно разрезать квадрат размером 8×8? (Все разрезы должны проходить по линиям сетки, требуется найти все решения и доказать, что других нет.)

3. Найдите все пары простых чисел p и q, обладающие следующим свойством:
$7p + 1$ делится на q, а $7q + 1$ делится на p. Ответ обосновать.

4. Любознательный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка A на плане) до своего отеля (точка B). Турист хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрестке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет.



5. В комнате стоят несколько четырёхногих стульев и трёхногих табуреток. Когда на всех стульях и табуретках сидит по человеку, в комнате всего 39 ног. Сколько в комнате стульев и сколько табуреток?

6. Имеются 6 запертых чемоданов и 6 ключей к ним. При этом неизвестно, к какому чемодану подходит какой ключ. Какое наименьшее число попыток надо сделать, чтобы наверняка открыть все чемоданы? Ответ обосновать.

Матбой номер 2

1. На столе в ряд лежат четыре монеты. Среди них обязательно есть как настоящие, так и фальшивые (которые легче настоящих). Известно, что любая настоящая монета лежит левее любой фальшивой. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь определить тип каждой монеты, лежащей на столе?

2. Из четырёх цифр, отличных от нуля, составлены два четырёхзначных числа: самое большое и самое маленькое из возможных. Сумма получившихся чисел оказалась равна 11990. Какие числа могли быть составлены?

3. Среди 25 жирафов, каждые два из которых различного роста, проводится конкурс "Кто выше?". За один раз на сцену выходят пять жирафов, а жюри справедливо (согласно росту) присуждает им места с первого по пятое. Каким образом надо организовать выходы жирафов, чтобы после семи выходов определить первого, второго и третьего призёров конкурса?

4. Квадрат 4×4 называется *магическим*, если в его клетках встречаются все числа от 1 до 16, а суммы чисел в столбцах, строках и двух диагоналях равны между собой. Шестиклассник Сеня начал составлять магический квадрат и поставил в какую-то клетку число 1. Его младший брат Лёня решил ему помочь и поставил числа 2 и 3 в клетки, соседние по стороне с числом 1. Сможет ли Сеня после такой помощи составить магический квадрат?

5. За большим круглым столом сидят 60 человек, каждый из которых – рыцарь или лжец. Каждый из них произнес фразу: “Из пяти человек, сидящих подряд справа от меня, хотя бы двое – лжецы”. Сколько рыцарей может сидеть за этим столом? Найдите все варианты ответа и докажите, что других нет.

6. Отметьте несколько точек и несколько прямых так, чтобы на каждой прямой лежало ровно три отмеченные точки и через каждую точку проходило ровно три отмеченные прямые.

Матбой номер 3

1. Найдите наибольшее четырёхзначное число, которое делится на 7 и записывается четырьмя различными цифрами.

2. Из одинакового количества квадратов со сторонами 1, 2 и 3 составьте квадрат наименьшего возможного размера. Ответ обосновать.

3. На координатной прямой отмечено несколько точек (больше двух). Каждая точка, кроме двух крайних, находится ровно посередине между какими-то двумя отмеченными. Могут ли все отрезки, внутри которых нет отмеченных точек, иметь различные длины?

4. Докажите, что $7 + 7^2 + \ldots + 7^{4K}$, где K – любое натуральное число, делится на 400.

5. Докажите, что если из числа 111...1 (2002 единицы) вычесть число 22...2 (1001 двойка), то получится квадрат натурального числа.

6. Есть девять борцов разной силы. В поединке каждых двух из них всегда побеждает сильнейший. Можно ли разбить их на три команды по три борца так, чтобы во встречах команд по системе "каждый с каждым" первая команда по числу побед одержала верх над второй, вторая – над третьей, а третья – над первой?