Командная олимпиада

1.

За контрольную работу каждый из 25 школьников получил одну из оценок "3", "4" или "5". На сколько больше было пятёрок, чем троек, если сумма всех оценок равна 106?

Решение:

Пусть a школьников получили тройку, b школьников – четверку, c школьников – пятёрку. Из условия задачи следует, что $a + b + c = 25$ и $3a + 4b + 5c = 106$.

Умножим обе части первого уравнения на 4: $4a + 4b + 4c = 100$. Теперь вычтем из второго уравнения полученное, тогда $c – a = 6$.

Ответ:

на 6.

2.

Произведение пяти чисел не равно нулю. Каждое из этих чисел уменьшили на единицу, при этом их произведение не изменилось. Приведите пример таких чисел.

Решение:

Ответ: например, 5, 6, 7, 8, -1.

Можно построить и другой пример: пусть первые четыре числа - двойки. Получаем уравнение на пятое число x:
$16x=x-1$, откуда $x=-1/15$.

3.

Улитка в течение 9 минут часть времени ползла, часть времени отдыхала. За каждую отдельно взятые 2 минуты подряд она проползла 20 см. Следует ли из этого, что за 9 минут она проползла 90 сантиметров? Ответ обосновать.

Решение:

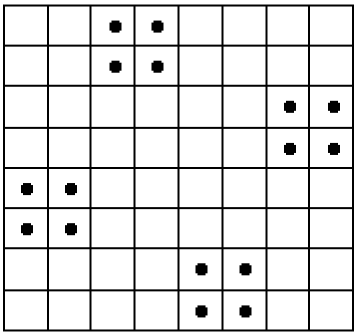
Не следует. Например, пусть улитка каждую нечётную минуту стоит, каждую чётную минуту ползёт со скоростью 20 см в минуту. Тогда за каждый участок времени длительностью в две минуты улитка проползёт по 20 см, но за 9 минут проползёт 80 см.

4.

Можно ли в центры 16 клеток шахматной доски 8×8 вбить гвозди так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?

Решение:

Можно. См. рисунок:



Ответ:

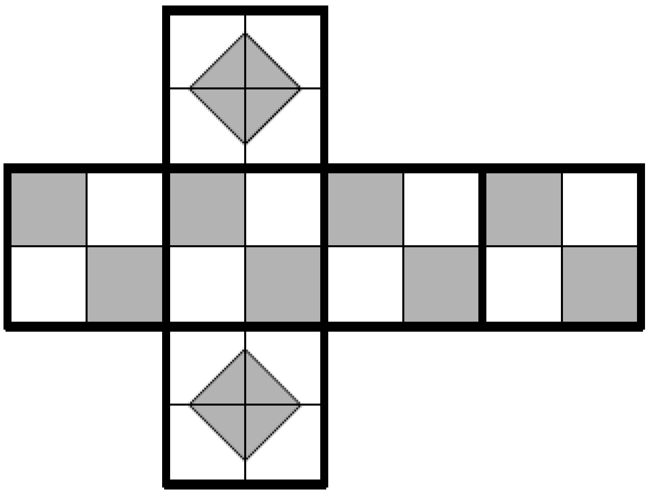
Можно.

5.

Дан куб с ребром 2. Покажите, как наклеить на него без наложений 10 квадратов со стороной 1 так, чтобы никакие квадраты не граничили по отрезку (по стороне или её части). Перегибать квадраты нельзя.

Решение:

Один из возможных примеров приведён на рисунке. Для удобства наклейки изображены на развёртке куба.

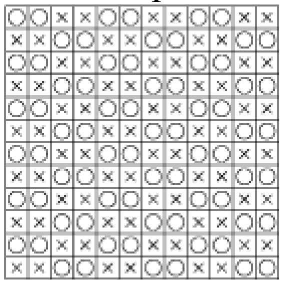


6.

Можно ли расставить на листе клетчатой бумаги крестики и нолики так, чтобы ни на одной горизонтали, вертикали и диагонали нельзя было встретить три одинаковых знака подряд?

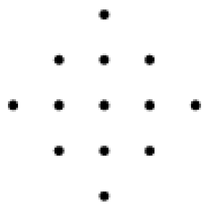
Решение:

Ответ: можно. Пример такой расстановки приведён на рисунке.

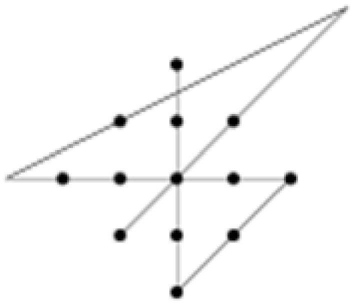


7.

Зачеркните все 13 точек на рисунке пятью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды.



Ответ:

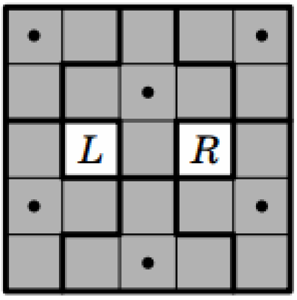


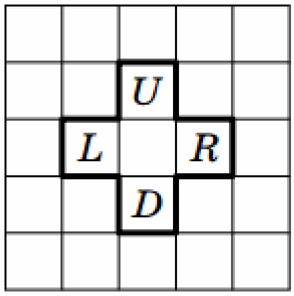
8.

Петя записал 25 чисел в клетки квадрата 5×5. Известно, что их сумма равна 500. Вася может попросить его назвать сумму чисел в любой клетке и всех её соседях по стороне. Может ли Вася за несколько таких вопросов узнать, какое число записано в центральной клетке?

Решение:

Задав вопросы про 6 клеток, отмеченных на рисунке слева, Вася может узнать сумму всех чисел, кроме L и R. Вычитая её из 500, он найдёт $L + R$. Аналогично он может найти $U + D$. После этого Васе остаётся узнать сумму чисел в центральном кресте и вычесть из неё $(L + R) + (U + D)$.





Ответ:

Может.

9.

Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая команда сыграла с каждой один раз). Доказать, что можно выделить такие четыре команды A, B, C и D, что A выиграла у B, C и D; B выиграла у C и D, C выиграла у D.

Решение:

Суммарное количество проигрышей равно суммарному количеству выигрышей; каждая команда провела семь матчей. Поэтому среднее количество выигрышей у команды равно 3,5, следовательно, хотя бы одна команда выиграла не менее четырёх матчей. На каждую из четырёх команд, проигравших этой, приходится в среднем 1,5 выигрыша (рассматриваются только матчи между этими четырьмя командами), значит, из них можно выбрать такую, которая выиграла у двух других. Поскольку из этих двух команд одна выиграла у другой, искомая четвёрка команд A, B, C, D построена.

10.

Школьник сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он решил пробежать вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 150 ступенек. Сколько ступенек он насчитал, спускаясь вместе с задержавшим его сотрудником метрополитена по неподвижному эскалатору?

Решение:

Школьник бежал вверх в 5 раз дольше, чем вниз (потому что насчитал в 5 раз больше ступенек). При этом навстречу ему выползло в 5 раз больше ступенек, чем "убежало" при спуске. Если школьник сбежит вниз 5 раз, то он насчитает 150 ступенек, а убегут от него столько же ступенек, сколько выползло при подъёме. Поэтому $150 + 150 = 300$ – это *ушестеренное* число ступенек эскалатора.

Ответ:

50 ступенек.

Матбой номер 1

1

n рыцарей из двух враждующих стран сидят за круглым столом. Число пар соседей-друзей равно числу пар соседей-врагов.
Доказать, что n делится на 4.

Решение:

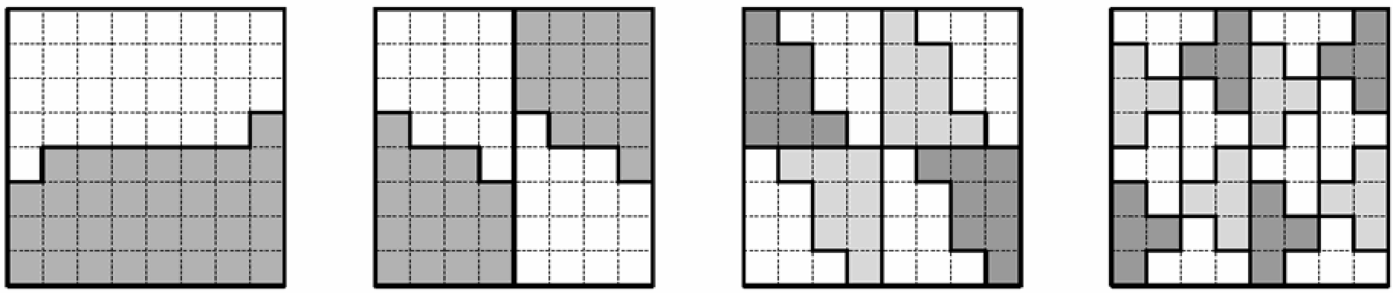
Количество *всех* пар соседей равно n. По условию ровно *половину* от него составляют пары соседей-врагов. Разобьём всех рыцарей на группы рядом сидящих друзей. Эти группы чередуются, поэтому их количество чётно. Но пары соседей-врагов сидят только на "стыках" этих групп. Следовательно, количество пар соседей-врагов тоже *чётно*. Умножив чётное число на 2, получим число, кратное 4.

2

На сколько равных восьмиугольников можно разрезать квадрат размером 8×8? (Все разрезы должны проходить по линиям сетки, требуется найти все решения и доказать, что других нет.)

Решение:

Ясно, что количество клеток в одном многоугольнике является делителем числа 64. Одна и две клетки восьмиугольника образовывать не могут, поэтому возможные варианты: 4, 8, 16 или 32 клетки. Соответствующие примеры см. на рисунке.



Ответ:

На 2, 4, 8 или 16.

3

Найдите все пары простых чисел p и q, обладающие следующим свойством: $7p + 1$ делится на q, а $7q + 1$ делится на p.

Решение:

Будем считать, что $p < q$ (равны эти числа быть не могут).

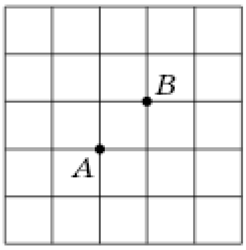
Число $7p + 7q + 1$, очевидно, делится на pq. Значит, $7p + 7q + 1 \geq pq$, откуда либо $p \leq 7$, либо $(p - 7)^2 < (p - 7)(q - 7) \leq 50$, то есть
$p \leq 14$. Поэтому p может принимать лишь значения 2, 3, 5, 7, 11 или 13, а $7p + 1$ – соответственно значения 15, 22, 36, 50, 78 или 92. Проверкой простых делителей этих чисел убеждаемся, что условию задачи удовлетворяют лишь три пары, приведённые в ответе.

Ответ:

2 и 3, 2 и 5, 3 и 11.

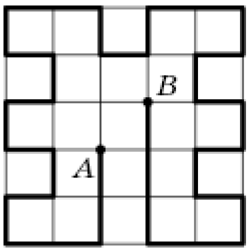
4

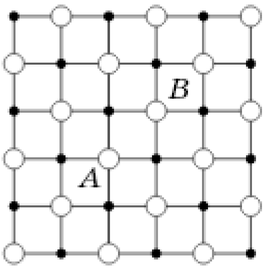
Любознательный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка *A* на плане) до своего отеля (точка *B*). Турист хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрестке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет.



Решение:

Пример. Один из возможных маршрутов туриста изображён на рисунке слева. Двигаясь по этому пути, турист пройдёт 34 улицы (улицей мы называем отрезок между двумя соседними перекрёстками).





Оценка. Всего в Старом городе 36 перекрёстков. Всякий раз, когда турист проходит очередную улицу, он попадает на новый перекрёсток. Таким образом, больше 35 улиц турист пройти не сможет (начальный перекрёсток *A* не считается). Покажем, что посетить 35 перекрёстков (и, следовательно, пройти 35 улиц) турист тоже не сможет. Для этого раскрасим перекрёстки в чёрный и белый цвета в шахматном порядке (рис. справа). Всякий раз, проходя улицу, турист попадает на перекрёсток другого цвета. И отель, и вокзал расположены на белых перекрёстках. Поэтому любой маршрут содержит чётное число улиц, а число 35 нечётно.

5

В комнате стоят несколько четырёхногих стульев и трёхногих табуреток. Когда на всех стульях и табуретках сидит по человеку, в комнате всего 39 ног. Сколько в комнате стульев и сколько табуреток?

Решение:

Задача сводится к решению уравнения $6x + 5y = 39$ в натуральных числах.
Поскольку $5(x + y) \le 6x + 5y \le 6(x + y)$, то $x + y = 7$, $x = 39 - 5 \cdot 7 = 4$.

Ответ:

Три табуретки и четыре стула.

6

Имеются 6 запертых чемоданов и 6 ключей к ним. При этом неизвестно, к какому чемодану подходит какой ключ. Какое наименьшее число попыток надо сделать, чтобы наверняка открыть все чемоданы? Ответ обосновать.

Подсказка:

Попробуйте за пять попыток определить, к какому из 6 чемоданов подходит первый ключ.

Решение:

Стандартное неверное решение: "Каждый из шести чемоданов пытаемся открыть каждым из шести ключей, всего попыток 36". Можно найти соответствие между ключами и чемоданами за меньшее число попыток. Берём первый ключ и по очереди пытаемся открыть им чемоданы. Если один из чемоданов открылся — прекрасно, отставляем в сторону этот чемодан с этим ключом. Если же среди первых 5ти чемоданов ни один не открылся, то значит этот ключ непременно соответствует шестому чемодану. Что произошло? Мы использовали не более пяти попыток; у нас осталось 5 ключей и 5 чемоданов. Снова берём один ключ и открываем все оставшиеся чемоданы подряд. Для того чтобы определить, какому чемодану соответствует этот ключ, нужно четыре попытки. Берём следующий ключ и т.д. Всего понадобится 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 попыток.

Ответ:

15 попыток.

Матбой номер 2

1

На столе в ряд лежат четыре монеты. Среди них обязательно есть как настоящие, так и фальшивые (которые легче настоящих). Известно, что любая настоящая монета лежит левее любой фальшивой. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь определить тип каждой монеты, лежащей на столе?

Решение:

Пронумеруем монеты слева направо. Так как среди монет есть обязательно настоящая и фальшивая, то первая монета настоящая, а четвертая– фальшивая. Необходимо определить вид второй и третьей монет. Настоящие монеты лежат левее фальшивых, значит возможны следующие случаи: 1)настоящая, настоящая, настоящая, фальшивая; 2)настоящая, настоящая, фальшивая, фальшивая; 3)настоящая, фальшивая, фальшивая, фальшивая.
Положим на левую чашу весов первую и четвертую монеты, а на правую чашу весов– вторую и третью монеты.
1) Если правая чаша перевесила, то на ней лежат только настоящие монеты, т.е. вторая и третья монеты– настоящие.
2) Если весы находятся в равновесии, то на каждой чаше лежат настоящая и фальшивая монеты, т.е. вторая монета– настоящая, а третья– фальшивая.
3) Если левая чаша перевесила, то на правой чаше лежат только фальшивые монеты, т.е. вторая и третья монеты– фальшивые.

2

Из четырёх цифр, отличных от нуля, составлены два четырёхзначных числа: самое большое и самое маленькое из возможных. Сумма получившихся чисел оказалась равна 11990. Какие числа могли быть составлены?

Решение:

Обозначим цифры, из которых были составлены числа, в порядке возрастания: A, B, C и D. Тогда самое маленькое число, составленное из этих цифр – ABCD, а самое большое – DCBA. Мы получаем ребус $ABCD + DCBA = 11990$ (в котором разные буквы могут обозначать и одинаковые цифры). Сразу ясно, что $A + D = 10$. Значит, из разряда сотен в разряд тысяч перешла единица, то есть $B + C > 9$. Теперь из разряда десятков видно, что $B + C = 18$. Поэтому $B = C = 9$. Следовательно, и $D = 9$, а $A = 1$.

Ответ:

9991 и 1999.

3

Среди 25 жирафов, каждые два из которых различного роста, проводится конкурс "Кто выше?". За один раз на сцену выходят пять жирафов, а жюри справедливо (согласно росту) присуждает им места с первого по пятое. Каким образом надо организовать выходы жирафов, чтобы после семи выходов определить первого, второго и третьего призёров конкурса?

Решение:

Разобьём всех жирафов на пять групп по пять жирафов в каждой. Сравним жирафов внутри каждой группы. На это потребуется 5 выходов. Шестым выходом сравним самых высоких жирафов каждой группы. После этого обозначим группы буквами А, Б, В, Г, Д в порядке убывания роста самых высоких в группе, а жирафов внутри группы обозначим индексами 1, 2, 3, 4, 5 также в порядке убывания их роста. Составим таблицу роста жирафов.

$А_1$	$Б_1$	$В_1$	$Г_1$	$Д_1$
$А_2$	$Б_2$	$В_2$	$Г_2$	$Д_2$
$А_3$	$Б_3$	$В_3$	$Г_3$	$Д_3$
$А_4$	$Б_4$	$В_4$	$Г_4$	$Д_4$
$А_5$	$Б_5$	$В_5$	$Г_5$	$Д_5$

Заметим, что жирафы из групп Г и Д не могут быть призёрами, так как рост каждого из них меньше, чем рост жирафов $А_1$, $Б_1$ и $В_1$. Также призерами не могут быть жирафы $А_4$, $Б_4$, $В_4$, $А_5$, $Б_5$, $В_5$. Кроме того, так как $А_1 > Б_1 > В_1 > В_2 > В_3$, то призёрами не могут быть жирафы $В_2$ и $В_3$. А так как
$А_1 > Б_1 > Б_2 > Б_3$, то и $Б_3$ – не призер. Таким образом, призёрами могут оказаться только шесть жирафов: $А_1$, $А_2$, $А_3$, $Б_1$, $Б_2$, $В_1$. Но уже известно, что жираф, обозначенный $А_1$, – самый высокий. Седьмым выходом мы сравним 5 остальных жирафов и тем самым выявим жирафов, занявших 2 и 3 место.

4

Квадрат 4×4 называется *магическим*, если в его клетках встречаются все числа от 1 до 16, а суммы чисел в столбцах, строках и двух диагоналях равны между собой. Шестиклассник Сеня начал составлять магический квадрат и поставил в какую-то клетку число 1. Его младший брат Лёня решил ему помочь и поставил числа 2 и 3 в клетки, соседние по стороне с числом 1. Сможет ли Сеня после такой помощи составить магический квадрат?

Решение:

Сумма чисел в каждом ряду квадрата должна быть равна $(1 + 2 + ... + 15 + 16) : 4 = 34$. Рассмотрим два случая:

1) Пусть Лёня поставил числа 2 и 3 в одну горизонталь или в одну вертикаль с числом 1. Тогда в этом ряду осталась одна свободная клетка, куда необходимо поставить $34 – (1 + 2 + 3) = 28$. Но такого числа в этом магическом квадрате быть не может.

2) Пусть Лёня поставил одно из этих чисел в одну горизонталь с числом 1, а другое – в одну вертикаль. Тогда в том ряду, где стоит 2, сумма чисел в оставшихся клетках равна $34 – (1 + 2) = 31$. Значит, в этом ряду обязаны стоять числа 15 и 16. Но в том ряду, где стоит 3, сумма чисел в оставшихся клетках равна $34 – (1 + 3) = 30$. Значит, там обязаны стоять числа 16 и 14. Но число 16 невозможно поставить в оба ряда, так как на их пересечении уже стоит 1. Следовательно, Сеня не сможет составить магический квадрат.

Ответ:

Не сможет.

5

За большим круглым столом сидят 60 человек, каждый из которых – рыцарь или лжец. Каждый из них произнес фразу: “Из пяти человек, сидящих подряд справа от меня, хотя бы двое – лжецы”. Сколько рыцарей может сидеть за этим столом? Найдите все варианты ответа и докажите, что других нет.

Решение:

Разобьем 60 сидящих за столом людей на 10 групп по 6 человек в каждой и докажем, что в каждой из групп ровно два лжеца. Рассмотрим два случая.

1) Пусть первый человек в такой группе – рыцарь. Тогда он сказал правду, и среди пяти человек этой группы, сидящих справа от него, хотя бы двое – лжецы. При этом, более двух лжецов в такой группе быть не может, иначе бы первый лжец этой группы сказал бы правду. Значит, в этой группе ровно два лжеца.

2) Пусть первый человек в такой группе – лжец. Тогда он солгал, и среди пяти человек этой группы, сидящих справа от него, не более одного лжеца. При этом, ровно один лжец должен быть, иначе первый рыцарь этой группы солгал бы: за ним сидят четыре рыцаря и не более одного лжеца. Значит, и в этой группе, с учетом первого, ровно два лжеца.

Таким образом, в каждой из десяти групп – ровно 4 рыцаря, всего рыцарей – 40.

Ответ:

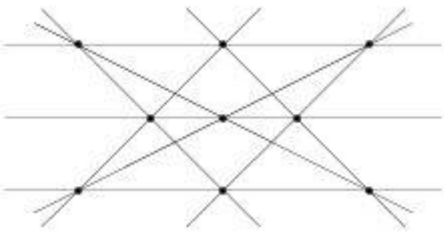
40 рыцарей.

6

Отметьте несколько точек и несколько прямых так, чтобы на каждой прямой лежало ровно три отмеченные точки и через каждую точку проходило ровно три отмеченные прямые.

Решение:

См. рис. 18.



Матбой номер 3

1

Найдите наибольшее четырёхзначное число, которое делится на 7 и записывается четырьмя различными цифрами. Ответ обосновать.

Решение:

Выберем последовательно наибольшие возможные значения в разрядах тысяч, сотен и десятков, то есть будем искать число вида $987A$. Число 987 делится на 7, значит, и A должно делиться на 7. Так как значение $A = 7$ выбрать нельзя, то $A = 0$.

Ответ:

9870.

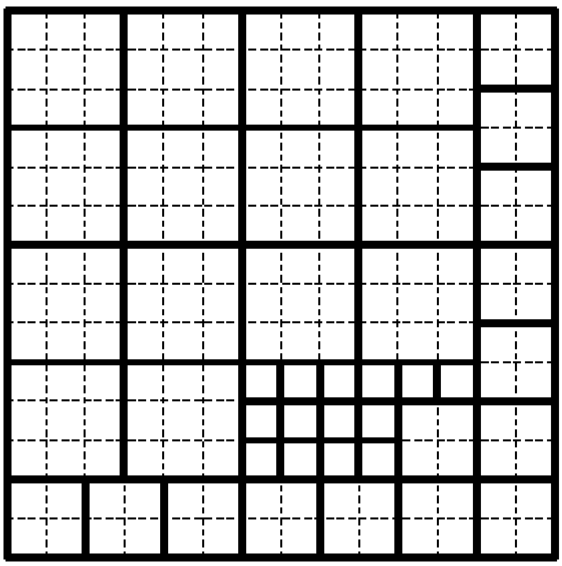
2

Из одинакового количества квадратов со сторонами 1, 2 и 3 составьте квадрат наименьшего возможного размера. Ответ обосновать.

Решение:

Оценка. Пусть искомый квадрат составлен из n квадратов каждого вида. Тогда его площадь равна $n\cdot(1^2 + 2^2 + 3^2) = 14n = 2\cdot 7\cdot n$. Так как длина стороны искомого квадрата должна быть целой, то полученное число должно являться точным квадратом. Значит, число n должно содержать множители 2 и 7, то есть $n \geq 14$.

Пример. См. рисунок, на котором использовано по 14 квадратов каждого вида.

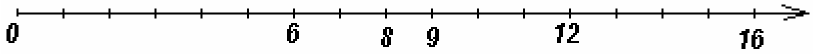


3

На координатной прямой отмечено несколько точек (больше двух). Каждая точка, кроме двух крайних, находится ровно посередине между какими-то двумя отмеченными. Могут ли все отрезки, внутри которых нет отмеченных точек, иметь различные длины?

Решение:

Отметим на координатной прямой точки, соответствующие числам 0, 6, 8, 9, 12, 16 (см. рис.). Тогда 6 – середина отрезка $[0, 12]$, 8 – середина отрезка $[0, 16]$, 9 – середина отрезка [6, 12], 12 – середина отрезка [8, 16]. При этом, длины всех отрезков, не содержащих отмеченных точек, различны: 6, 2, 1, 3, 4.



Ответ:

Могут.

4

Доказать, что $7 + 7^2 + ... + 7^{4K}$, где K – любое натуральное число, делится на 400.

Решение:

Данную сумму можно сгруппировать следующим образом:
$(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + (7^5 + 7^6 + 7^7 + 7^8) + ... + (7^{4K-3} + 7^{4K-2} + 7^{4K-1} + 7^{4K}) = (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4)(1 + 7^4 + 7^8 + ... + 7^{4K-4})$. Сумма $(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) = 7\cdot 400$ делится на 400, откуда и вытекает доказываемое.

5

Докажите, что если из числа 111...1 (2002 единицы) вычесть число 22...2 (1001 двойка), то получится полный квадрат.

Решение:

Обозначим A = 11...1 (1001 единица), B = 111...1 (2002 единицы), C = 22...2 (1001 двойка). Тогда C=2A, B=D*A, где D=100..01 (1002 цифры). Таким образом, B-C = (D-2)A = 99..9*A (1001 девятка). Окончательно, B-C = 9A*A = $(3A)^2$ - полный квадрат.

6

Есть девять борцов разной силы. В поединке любых двух из них всегда побеждает сильнейший. Можно ли разбить их на три команды по три борца так, чтобы во встречах команд по системе "каждый с каждым" первая команда по числу побед одержала верх над второй, вторая – над третьей, а третья – над первой?

Решение:

Упорядочим наших борцов по силе и присвоим каждому рейтинг от 9 до 1. Тогда сумма рейтингов борцов равна 45. Постараемся составить команды так, чтобы суммы рейтингов борцов в командах были равны. Нарисуем магический квадрат 3×3 и рассмотрим его строки. Это три команды с одинаковым суммарным рейтингом – 15.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Проверим. Первая со второй – счёт 5 : 4, вторая с третьей – счёт 5 : 4, и третья с первой – счёт 5 : 4!

Ответ:

Можно.