Ленинградская область

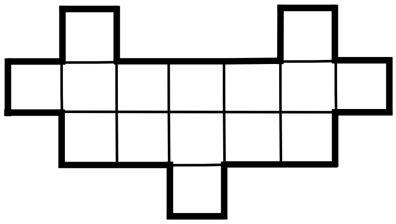
Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

5 класс

1. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке, на три части, одинаковые и по форме, и по площади. Разрезы проводятся по линиям сетки.



2. Лифт поднимается с 1го на 8й этаж за 56 секунд. Сколько времени нужно, чтобы подняться на этом лифте на 10й этаж?

3. Взяли три двузначных числа, одно из которых начинается на цифру 6, другое на цифру 7, третье на цифру 8. Если сложить эти числа попарно, то в одном случае получится 167, в двух других – два различных трехзначных числа, начинающихся на 14. Найдите эти двузначные числа.

4. На площадке в двух кучках лежат камешки. В первой 72 камешка, во второй – 60 камешков. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди берут любое количество камешков из одной кучки по своему выбору. Выигрывает тот, кто забирает последний камешек с площадки. Пропускать ход не разрешается. Первым ходит Петя. Может ли он так спланировать свои ходы, чтобы выиграть?

5. Архипелаг состоит из трех островов, которые называются Лесной, Скалистый и Каменный. Если проплыть от Лесного к Скалистому, а затем, без остановки, от Скалистого к Каменному, то потребуется на 6 часов больше, чем на плавание от Лесного к Каменному напрямую. Если проплыть от Скалистого к Каменному, а затем, без остановки, от Каменного к Лесному, то потребуется на 10 часов больше, чем на плавание от Скалистого к Лесному напрямую. Сколько часов занимает плавание от Скалистого к Каменному напрямую?

6. Сиденья карусели окрашены в цвета: 7 сидений – в красный, 7 – в зеленый, 7 – в синий. Прибежала группа детей и заняла какие-то места на этой карусели, выбирая их случайно. Сколько должно было быть детей в группе, чтобы среди них обязательно нашлось три человека, которым достанутся сиденья трех разных цветов?

Продолжительность выполнения заданий – 3 астрономических часа (180 минут).
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 42 балла за все задание.
Не забудьте обосновать свои решения задач!

Ленинградская область

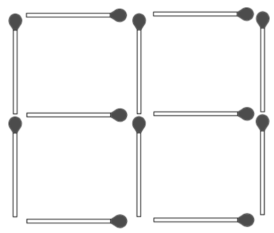
Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

6 класс

1. В фигуре, составленной из спичек, переложите три спички так, чтобы получилось три равных квадрата.



2. Северус Снегг нанался на работу в Хогвартс на срок 1 год, с уговором получить в качестве оплаты Волшебный Котел и 4900 галлеонов. Однако, отработав 7 месяцев, он разорвал контракт, получив за выполненную работу Волшебный Котел и 1900 галлеонов. Сколько галлеонов стоил Волшебный Котел?

3. В числе 2345 переставили цифры, и каждая цифра оказалась не на своем месте. Полученное число сложили с исходным. В сумме получилось четное число, все цифры которого различны. Найдите полученное число.

4. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди пишут цифры 13-ти значного числа, приписывая по одной цифре слева или справа к уже написанным. Первым Петя пишет свою цифру, затем одну цифру пишет Вася, и т.д. Ноль слева приписывать не разрешается. Если полученное 13-ти значное число не делится на 9, то выигрывает Вася. Если полученное число делится на 9, то выигрывает Петя. Кто из них выиграет при правильной игре, и как он должен играть? (*Правильная игра состоит в том, что игрок придумывает план, выполнение которого гарантирует ему победу независимо от ходов соперника.*)

5. В саду есть свободная площадь 68 кв. метров. Можно посадить кусты смородины, крыжовника, малины. Одному кусту смородины нужно 8 кв м, одному кусту крыжовника нужно 4 кв м, одному кусту малины – 5 кв м. Продажа ягод приносит 10 тугриков с одного куста смородины, 3 тугрика с одного куста крыжовника, 8 тугриков с одного куста малины. Сколько и каких кустов нужно посадить, чтобы получить наибольший доход?

6. В клетках квадрата 4×4 стоят Рыцари и Лжецы. Каждый из них сказал фразу "в соседних клетках стоят одни Лжецы". Какое наибольшее и наименьшее количество Рыцарей могло стоять в клетках квадрата? Рыцарь всегда произносит верное утверждение, Лжец всегда произносит неверное утверждение. Соседними считаются клетки, имеющие общие точки по стороне или по углу, т.е. по вертикали, горизонтали, диагонали.

Продолжительность выполнения заданий – 3 астрономических часа (180 минут).
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 42 балла за все задание.
Не забудьте обосновать свои решения задач!

Ленинградская область
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2021-2022 уч.год
7 класс

1. Нарисуйте восемь отрезков так, чтобы каждый отрезок пересекал ровно три отрезка, и никакие три отрезка не пересекались бы в одной точке. Пересечение происходит во внутренних точках, соединенять отрезки в вершинах не разрешается.

2. На Новогоднем празднике школьники организовали игру-обмен: если им давали пять мандаринов, то они меняли их на три хлопушки и конфету, а если им давали две хлопушки, то они меняли их три мандарина и конфету. Дед Мороз несколько раз сыграл с ними в эту игру и получил всего 50 конфет. Изначально у него был с собой только мешок с мандаринами, после всех обменов у него не осталось ни одной хлопушки. Сколько мандаринов отдал Дед Мороз детям?

3. Про натуральное четное число n известно, что если оно делится на простое число p, то число $n-1$ делится на число $p-1$. Докажите, что n может быть только степенью двойки.

4. Турист прошел по всем дорожкам парка, пройдя по каждой ровно два раза. Садовник говорит, что дорожки парка нельзя обойти, пройдя по каждой ровно один раз. Может ли существовать такой парк?

5. В кучке 111 камешков. Петя и Вася играют в игру: они по очереди берут из кучки сколько-нибудь камешков, но не больше 9. Пропускать ход не разрешается. Выигрывает тот, кто возьмет последний камешек. Первым ходит Петя. Кто из них выиграет при правильной игре, и как он должен играть?

6. Сколько существует шестизначных чисел, в которых четыре подряд идущие цифры образуют число 2021?

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 42 балла за все задание.
Не забудьте обосновать свои решения задач!

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

8 класс

1. Существуют ли четыре различных натуральных числа a, b, c, d таких, что числа $a^2 + 2cd + b^2$ и $c^2 + 2ab + d^2$ являются квадратами натуральных чисел?

2. Имеется десятизначное число, для записи которого использованы все десять цифр, при этом ноль не стоит на первом месте. Цифры этого числа переписали в обратном порядке и полученную последовательность приписали справа к первоначальному числу. Докажите, что получившееся двадцатизначное число делится на 99.

3. Дана окружность с центром в точке O и радиусом R. На окружности отметили две точки A и B так, что $\angle AOB = 20°$. Докажите, что $AB > \frac{1}{3}R$.

4. Однажды команда Рыцарей и команда Лжецов встретились в парке и решили покататься на круговой карусели, вмещающей 40 человек (*Карусель "Цепочка", на которой все сидят друг за другом*). Когда они расселись, каждый увидел двоих, одного впереди себя, другого за собой, и сказал: "Хотя бы один из сидящих впереди меня или сзади меня принадлежит к моей команде". Одно место оказалось свободным, и они позвали еще одного Лжеца. Этот Лжец сказал: "Вместе со мной мы можем расположиться на карусели так, чтобы это правило снова было выполнено". Из скольки человек состояла команда Рыцарей? (*Рыцарь всегда говорит правду, Лжец всегда говорит неправду.*)

5. Имеется 12 положительных вещественных чисел. Известно, что отношение любых двух чисел из этого набора не превосходит числа 2. Докажите, что их можно разбить на шесть пар так, что если вычислить суммы чисел в каждой паре, то отношение любых двух из полученных шести сумм не будет превосходить $\frac{3}{2}$.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.

Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.

Не забудьте обосновать свои решения задач!

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

9 класс

1. Ольга проехала из города на дачу на такси с пересадкой в поселке. Из города до поселка она ехала на "Такси-А", и заплатила за поездку из расчета 6 руб за км. Из поселка до дачи она ехала на "Такси-Б" и заплатила за поездку из расчета 4 руб за км. На следующий день Ольга ехала обратно, и обе фирмы такси поменяли тариф – "Такси-А" за поездку от поселка до города взяло по 3 руб за км, "Такси-Б" взяло за поездку от дачи до поселка по 10 руб за км. Ольга насчитала, что на второй день она заплатила ровно на 100 руб меньше. Могло ли так быть? Оплата поездок в такси производилась за целое число километров, время на посадку и высадку Ольга не оплачивала.

2. Докажите неравенство для любых вещественных a, b

$$a^2 + 4b^2 + 4b - 4a + 5 \geq 0$$

   При каких a, b выполняется равенство?

3. На окружности отметили 2021 точку и соединили эти точки отрезками так, что получился выпуклый вписанный 2021-угольник, разрезанный диагоналями на треугольники. При этом никакие две диагонали не пересеклись во внутренних точках (*общими точками различных диагоналей являются только вершины*). Докажите, что среди полученных треугольников не может быть больше одного остроугольного.

4. Дана равнобедренная трапеция. Проведены две окружности: первая окружность касается боковых сторон в вершинах одного основания трапеции, вторая окружность касается боковых сторон в вершинах другого основания трапеции. Диагональ трапеции пересекается с каждой из окружностей, соответственно, получаются две хорды. Докажите, что эти хорды равны.

5. Уравнение $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, где p, q, r – целые, имеет три различных целых корня x_1, x_2, x_3. Докажите, что числа q и r не имеют общих делителей тогда и только тогда, когда числа в каждой из пар (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1) не имеют общих делителей.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.

Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

10 класс

1. Имеется 20 яблок, каждые два яблока отличаются по весу не более, чем на 40 грамм. Докажите, что эти яблоки можно разделить на две кучки по 10 яблок так, чтобы эти кучки отличались по весу не более, чем на 40 грамм.

2. Докажите, что при всех вещественных a, b, c, d выполняется неравенство
$$(ab+1)^2+(cd+1)^2+(ac)^2+(bd)^2 \geq 1$$

3. Две равные окружности S_1 и S_2 касаются изнутри окружности S в точках K и M. Точка P – произвольная точка окружности S. Точки Q и R – точки пересечения KP и MP с окружностями S_1 и S_2 соответственно. Докажите, что прямые KM и QR параллельны.

4. Как известно, из пяти различных чисел можно получить десять различных групп по три числа. Существуют ли пять таких различных натуральных чисел, что их суммы по три числа являются десятью последовательными числами?

5. Даны две функции (*все переменные и коэффициенты – вещественные*)
$$f(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0, \quad g(x)=x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$$
Известно, что равенство $f(x)=g(x)$ не выполняется ни при каких значениях x. Докажите, что равенство $f(x+1)=g(x-1)$ выполняется хотя бы при одном значении переменной x.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

11 класс

1. При каких значениях a уравнения

$$x^2 + ax + 1 = 0 \qquad \text{и} \qquad x^2 + x + a = 0$$

имеют хотя бы один общий корень?

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH и биссектриса AP. Найдите углы этого треугольника, если известно, что вокруг четырехугольника $ABPH$ можно описать окружность, и $\angle CPH = 20^\circ$.

3. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – многочлены степени 2021. Известно, что при всех вещественных x выполняется $F(F(x)) = G(G(x))$ и существует такое вещественное число $k, k \neq 0$, что при всех вещественных x выполняется $F(kF(F(x))) = G(kG(G(x)))$. Найдите степень многочлена $F(x) - G(x)$.

4. Внутри треугольника отметили несколько точек. Точки соединили цветными отрезками так, что в каждой отмеченной точке сходится три отрезка, и каждая вершина треугольника соединена одним цветным отрезком с какой-то из отмеченных точек. Оказалось, что проведенные отрезки раскрашены в три цвета так, что в кажой отмеченной точке сходятся три отрезка разного цвета. Докажите, что отрезки, проведенные в вершины треугольника, окрашены в разные цвета.

5. Пусть S – набор из n различных вещественных положительных чисел ($n \geq 3$). Докажите, что максимально возможное число различных натуральных степеней числа 3, которые могут быть представлены как сумма трех различных элементов S, равно $n - 2$.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.