Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

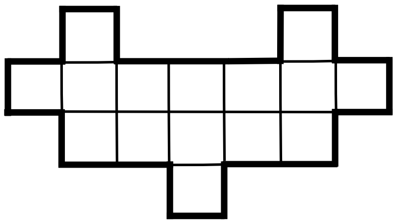
Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

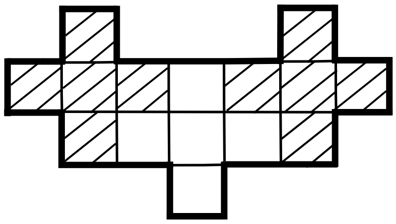
5 класс

Решения и ответы

1. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке, на три части, одинаковые и по форме, и по площади. Разрезы проводятся по линиям сетки.



Решение. Достаточно привести верный разрез или показать три полученные фигуры.



2. Лифт поднимается с 1го на 8й этаж за 56 секунд. Сколько времени нужно, чтобы подняться на этом лифте на 10й этаж?

Решение. При подъеме с 1го на 8й этаж лифт поднимается на 7 этажей. Время подъема на один этаж равно $56 : 7 = 8$ секунд. Поэтому, чтобы подняться на 9 этажей, с 1го на 10й, потребуется 72 секунды.

Ответ. 72 секунды.

3. Взяли три двузначных числа, одно из которых начинается на цифру 6, другое на цифру 7, третье на цифру 8. Если сложить эти числа попарно, то в одном случае получится 167, в двух других – два различных трехзначных числа, начинающихся на 14. Найдите эти двузначные числа.

Решение. Обозначим числа $\overline{6a}, \overline{7b}, \overline{8c}$. (*Черта означает, что два символа составляют двузначное число*). Сумма двух однозначных чисел не больше 18. Сумма $\overline{6a} + \overline{7b}$ не может дать 167, так как максимальная возможная сумма таких чисел равна 148. Аналогично, максимальная возможная сумма $\overline{6a}+\overline{8c}$ равна 158. Поэтому $\overline{7b}+\overline{8c} = 167$. Так как $70 + 80 = 150$, то $b + c = 17$, и так как b и c – цифры, то одна из них равна 8, а другая 9, иначе 17 не получить как сумму однозначных чисел. Остается выбрать, как расставить 8 и 9 в числах, чтобы выполнить все условия.

Рассмотрим пару 78 и 89. Тогда $\overline{6a} + 89$ дает число, начинающееся на 14 только, если $\overline{6a} = 60$. Проверяем, $60 + 78 = 138$, нам не подходит.

Рассмотрим пару 79 и 88. Тогда $\overline{6a} + 88$ дает число, начинающееся на 14, если $\overline{6a} = 60$ или $\overline{6a} = 61$. Проверяем, $60 + 79 = 139$, нам не подходит. Проверяем, $61 + 79 = 140$, это то, что требовалось.

Ответ. $61, 79, 88$.

4. На площадке в двух кучках лежат камешки. В первой 72 камешка, во второй – 60 камешков. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди берут любое количество камешков из одной кучки по своему выбору. Выигрывает тот, кто забирает последний камешек с площадки. Пропускать ход не разрешается. Первым ходит Петя. Может ли он так спланировать свои ходы, чтобы выиграть?

   Решение. Петя своим первым ходом должен взять из первой кучки 12 камешков. Тогда в обеих кучках останется по 60 камешков, провну. Далее Пете останется повторять ходы Васи. Пусть Вася взял из одной кучки n камешков, тогда Петя должен взять из другой кучки n камешков, и кучки снова станут равными. На каждый ход Васи у Пети будет возможность сделать свой симметричный ход. Поэтому когда-то Вася возьмет последний камень из одной из двух кучек, и Петя таким же ходом возьмет впоследний камень из другой кучки.

5. Архипелаг состоит из трех островов, которые называются Лесной, Скалистый и Каменный. Если проплыть от Лесного к Скалистому, а затем, без остановки, от Скалистого к Каменному, то потребуется на 6 часов больше, чем на плавание от Лесного к Каменному напрямую. Если проплыть от Скалистого к Каменному, а затем, без остановки, от Каменного к Лесному, то потребуется на 10 часов больше, чем на плавание от Скалистого к Лесному напрямую. Сколько часов занимает плавание от Скалистого к Каменному напрямую?

   Решение. Обозначим острова Л, С, К. Нам дано, что ЛС+СК=ЛК+6 и СК+КЛ=СЛ+10. (Парой букв обозачено время, которое требуется на соответствующий путь). Если сложить эти пути, т.е. проплыть оба мврщрута, то расстояние от Скалистого к Каменному будет пройдено дважды: ЛС+СК+СК+КЛ=ЛК+СЛ+16. Мы получили, что 2СК=16, т.е. на путь от Скалистого к Каменному требуется 8 часов.

   Ответ. 8 часов.

6. Сиденья карусели окрашены в цвета: 7 сидений – в красный, 7 – в зеленый, 7 – в синий. Прибежала группа детей и заняла какие-то места на этой карусели, выбирая их случайно. Каккое наименьшее количество детей должно было быть в группе, чтобы среди них обязательно нашлось три человека, которым достанутся сиденья трех разных цветов?

   Решение. Если в группе будет 14 детей, то они могут занять 7 сидений одного цвета и 7 сидений второго цвета, при этом сиденья третьего цвета останутся свободными. Поэтому в группе из 14 детей и меньше могут не найтись три человека, занимающие сиденья всех трех цветов. Если к этой группе добавить хотя бы одного, 15го, ребенка, то сидений двух цветов этой группе не хватит (их всего 14), и кто-то должен будет занять сиденье третьего цвета. Поэтому в группе из 15 детей (и больше) найдутся три человека, которым достанутся сиденья трех разных цветов.

   Ответ. 15 человек.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

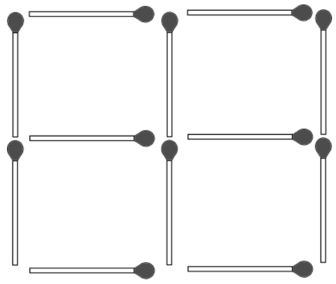
Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

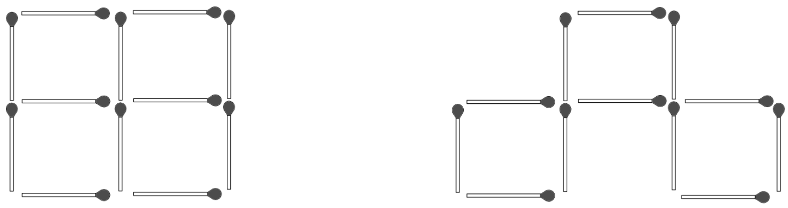
6 класс

Решения и ответы

1. В фигуре, составленной из спичек, переложите три спички так, чтобы получилось три равных квадрата.



Решение.



Достаточно показать результат перекладывания спичек.

2. Северус Снегг нанался на работу в Хогвартс на срок 1 год, с уговором получить в качестве оплаты Волшебный Котел и 4900 галлеонов. Однако, отработав 7 месяцев, он разорвал контракт, получив за выполненную работу Волшебный Котел и 1900 галлеонов. Сколько галлеонов стоил Волшебный Котел?

Решение. Так как Северус Снегг не отработал 5 месяцев и не получил 3000 галлеонов, то оплата работы за один месяц составляет 600 галлеонов. За 7 месяцев полная сумма оплаты его работы составляет 4200 галлеонов. Он получил деньгами 1900, значит, Волшебный Котел стоил $4200 - 1900 = 2300$ галлеонов.

Ответ. 2300 галлеонов.

3. В числе 2345 переставили цифры, и каждая цифра оказалась не на своем месте. Полученное число сложили с исходным. В сумме получилось четное число, все цифры которого различны. Найдите полученное число.

Решение. Полученное число может оканчиваться тоько на 3, так как его последняя цифра должна быть нечетной, чтобы сумма получилась четной. Мы учли, что пятерка должна переместиться на другое место. Тогда вторая цифра с конца может быть или 5, или 2. Проверим оба варианта.

Пусть новое число оканчивается на 23. Двойка и тройка уже переместились, поэтому имеем два варианта: 4523 и 5423. По очереди складываем эти числа с 2345. Получаем 6868 и 7768. Эти результаты содержат повторяющиеся цифры и не подходят по условию.

Пусть новое число оканчивается на 53. Имеем только один вариант 4253, так как нужно сместить цифру 2 с ее места. Сумма 2345 и 4253 равна 6598, что нам подходит.

Ответ. 6598.

4. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди пишут цифры 13-ти значного числа, приписывая по одной цифре слева или справа к уже написанным. Первым Петя пишет свою цифру, затем одну цифру пишет Вася, и т.д. Ноль слева приписывать не разрешается. Если полученное 13-ти значное число не делится на 9, то выигрывает Вася. Если полученное число делится на 9, то выигрывает Петя. Кто из них выиграет при правильной игре, и как он должен играть? (*Правильная игра состоит в том, что игрок придумывает план, выполнение которого гарантирует ему победу независимо от ходов соперника.*)

   Решение. Выиграет тот, кому достается написать последнюю цифру, т.е. Петя. Перед последним ходом он должен сосчитать сумму написанных двенадцати цифр и написать тринадцатую цифру, сделав так, чтобы сумма тринадцати цифр делилась бы на 9. Это всегда можно сделать. Пете нужно найти остаток от деления суммы двенадцати цифр на 9. Этот остаток меньше 9, и его нужно дополнить до 9 необходимой последней цифрой.

   Ответ. Выиграет Петя, последним ходом он должен дополнить сумму цифр до числа, которое делится на 9.

5. В саду есть свободная площадь 68 кв. метров. Можно посадить кусты смородины, крыжовника, малины. Одному кусту смородины нужно 8 кв м, одному кусту крыжовника нужно 4 кв м, одному кусту малины – 5 кв м. Продажа ягод приносит 10 тугриков с одного куста смородины, 3 тугрика с одного куста крыжовника, 8 тугриков с одного куста малины. Сколько и каких кустов нужно посадить, чтобы получить наибольший доход?

   Решение. Посчитаем, сколько тугриков приносит квадратный метр, занятый под кусты каждого вида. Смородина приносит $\dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$ тугриков с квадратного метра, крыжовник приносит $\dfrac{3}{4}$, малина $\dfrac{8}{5}$ тугриков. Крыжовник высаживать невыгодно, каждые 8 кв. метров выгоднее использовать под смородину. Так как $\dfrac{8}{5} > \dfrac{5}{4}$, то выгоднее посадить как можно больше малины. Поэтому нужно сравнить два варината – 65 кв. метров отвести под малину и 3 кв метра оставить свободными, или 60 кв. метров отвести под малину и 8 кв метров отвести под смородину. Первый вариант дает 104 тугрика, второй вариант дает 106 тугриков. Другие варианты менее выгодны, так как в разобранных двух вариантах площадь размером 60 кв метров занята наиболее выгодными кустами, и изменять использование этой площади нет необходимости.

   Тот факт, что малина наиболее выгодна для высаживания, можно установить, не используя дроби. Достаточно сравнить доход от каждого вида ягод с площади 40 кв. метров.

   Ответ. Нужно посадить 12 кустов малины и 1 куст смородины.

6. В клетках квадрата 4×4 стоят Рыцари и Лжецы. Каждый из них сказал фразу "в соседних клетках стоят одни Лжецы". Какое наибольшее и наименьшее количество Рыцарей могло стоять в клетках квадрата? Рыцарь всегда произносит верное утверждение, Лжец всегда произносит неверное утверждение. Соседними считаются клетки, имеющие общие точки по стороне или по углу, т.е. по вертикали, горизонтали, диагонали.

Решение. Исходя из сказанных фраз, каждый Рыцарь должен быть окружен Лжецами. В соседних клетках с Лжецом должны стоять не только Лжецы, т.е. каждый Лжец должен иметь соседом хотя бы одного Рыцаря.

Наименьшее количество Рыцарей можно получить, поставив Рыцарей в угловые клетки. Тогда Рыцарей будет 4, и каждый Лжец имеет соседом одного Рыцаря. Меньше, чем 4, поставить Рыцарей не получится. Для доказательства рассмотрим угловой квадрат 2×2, таких квадратов 4. Если в угловой квадрат не поставить ни одного Рыцаря, то при любой расстановке Рыцарей в соседних квадратах 2×2, угловой Лжец будет иметь соседями только Лжецов, что делает его высказывание верным. Поэтому минимальное количество Рыцарей – 4, по одному в каждом угловом квадрате.

Максимальное количество Рыцарей тоже 4. Квадрат 4×4 разбивается на четыре квадрата 2×2. Если предположить, что в большом квадрате размещено пять Рыцарей, то в какой-то из квадратов 2×2 попадают не меньше двух Рыцарей. В таком случае они являются соседями друг друга, что противоречит условию.

Пример с расстановкой четырех Рыцарей приведен.

Р	Л	Л	Р
Л	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л
Р	Л	Л	Р

Л	Л	Л	Р
Л	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л
Р	Л	Л	Р

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

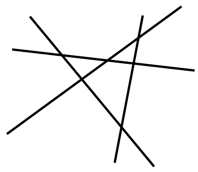
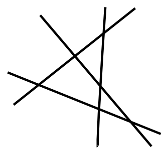
2021-2022 уч.год

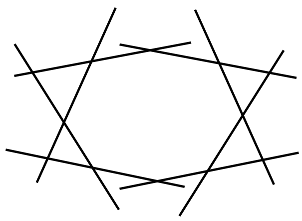
7 класс

Решения и ответы

1. Нарисуйте восемь отрезков так, чтобы каждый отрезок пересекал ровно три отрезка, и никакие три отрезка не пересекались бы в одной точке. Пересечение происходит во внутренних точках, соединенять отрезки в вершинах не разрешается.

   Решение. Существует не меньше двух способов нарисовать отрезки.

   Достаточно привести рисунок.

2. На Новогоднем празднике школьники организовали игру-обмен: если им давали пять мандаринов, то они меняли их на три хлопушки и конфету, а если им давали две хлопушки, то они меняли их три мандарина и конфету. Дед Мороз несколько раз сыграл с ними в эту игру и получил всего 50 конфет. Изначально у него был с собой только мешок с мандаринами, после всех обменов у него не осталось ни одной хлопушки. Сколько мандаринов отдал Дед Мороз детям?

   Решение. Дед Мороз провел 50 обменов, так как ему дали 50 конфет. В конце игры у него не осталось хлопушек, значит, все хлопушки поменял обратно. На каждые два обмена мандаринов на хлопушки (десять отдал - шесть получил) он проводил три обмена хлопушек на мандарины (шесть отдал - девять получил). Поэтому каждые пять обменов Дед Мороз отдавал безвозвратно один мандарин. Все обмены можно разделить на десять таких групп. Поэтому всего Дед Мороз отдал 10 мандаринов.

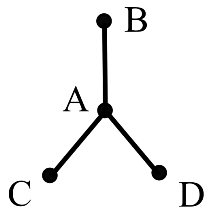
   Ответ. Дед Мороз отдал 10 мандаринов.

3. Про натуральное четное число n известно, что если оно делится на простое число p, то число $n-1$ делится на число $p-1$. Докажите, что n может быть только степенью двойки.

   Решение. Пусть число n делится на нечетное простое число p. Тогда число $p-1$ четно, и это значит, что нечетное число $n-1$ делится на четное число $p-1$. Получили противоречие. Значит, число n не имеет ни одного нечетного делителя, в его разложении на простые множители входит только число 2, т.е. n является степенью двойки.

4. Турист прошел по всем дорожкам парка, пройдя по каждой ровно два раза. Садовник говорит, что дорожки парка нельзя обойти, пройдя по каждой ровно один раз. Может ли существовать такой парк?

Решение. Такой парк существует. Приведем пример. На рисунке показан парк, дорожки которого составляют звезду. Это парк можно обойти, пройдя по дорожкам туда-обратно, начиная с центральной точки A ($A - B - A - C - A - D - A$). Можно также начать обход из любой концевой точки. Этот парк нельзя обойти, пройдя по дорожке ровно один раз. Докажем это. Если начать обход из центра A, то, придя в любую вершину, обратно выйти не получится. Если начать обход из концевой точки, например, из B, то можно дойти через центр до другой концевой точки ($B - A - C$), но попасть в третью точку D без возвращения в центр не получится.



Ответ. Такой парк существует.

5. В кучке 111 камешков. Петя и Вася играют в игру: они по очереди берут из кучки сколько-нибудь камешков, но не больше 9. Пропускать ход не разрешается. Выигрывает тот, кто возьмет последний камешек. Первым ходит Петя. Кто из них выиграет при правильной игре, и как он должен играть?

   Решение. Выиграет Петя. Ему нужно взять один камешек, оставив Васе 110. Далее в ответ на любой ход Васи он должен взять столько камешков, чтобы в кучке перед следующим ходом Васи оставалось число камешков, кратное 10. Это всегда можно сделать, так как Вася берет от 1 до 9 камешков, и поэтому не может уменьшить число камешков на 10, и не может оставить число камешков без изменений. Последним ходом Вася берет какое-то количество камешков из оставшихся 10. Петя забирает все оставшиеся после хода Васи камешки, так как их число находится в интервале от 1 до 9.

   Ответ. Выиграет Петя.

6. Сколько существует шестизначных чисел, в которых четыре подряд идущие цифры образуют число 2021?

   Решение. Рассмотрим три вида шестизначных чисел: $\overline{ab2021}, \overline{a2021b}, \overline{2021ab}$ (черта означает десятичную запись числа, где a, b – цифры).

   В первом случае, $\overline{ab2021}$, a может быть любой цифрой от 1 до 9, b может быть любой цифрой от 0 до 9, эти цифры выбираются независимо. Поэтому получаем всего $9 \cdot 10 = 90$ вариантов.

   Во втором случае, $\overline{a2021b}$, рассуждения повторяются, a может быть любой цифрой от 1 до 9, b может быть любой цифрой от 0 до 9, эти цифры выбираются независимо. Поэтому снова получаем $9 \cdot 10 = 90$ вариантов. Проверяем, что ни один вариант числа из первой группы не совпадает с числом из второй группы. Они, в частности, отличаются цифрой в разряде сотен.

   В третьем случае, $\overline{2021ab}$, цифры a и b выбираются независимо и произвольно от 0 до 9. В этом случае имеем 100 вариантов. Ни один вариант числа из третьей группы не совпадает с предыдущими вариантами, они различаются цифрой в разряде сотен.

   Обще число вариантов $90 + 90 + 100 = 280$.

   Ответ. 280 чисел.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

8 класс

Решения и ответы

1. Существуют ли четыре различных натуральных числа a, b, c, d таких, что числа $a^2+2cd+b^2$ и $c^2+2ab+d^2$ являются квадратами натуральных чисел?

   Решение. Мы хотим получить два квадрата суммы. Для того, чтобы воспользоваться формулой сокращенного умножения, достаточно сделать так, чтобы $ab = cd$. Можно подобрать любую четверку чисел, например, $ab = 2 \cdot 12 = 24 = 3 \cdot 8 = cd$.

   Равенство $2^2+2\cdot3\cdot8+12^2 = 3^2+2\cdot2\cdot12+8^2$, оно же $2^2+2\cdot2\cdot12+12^2 = 3^2+2\cdot3\cdot8+8^2$, удовлетворяет условию задачи.

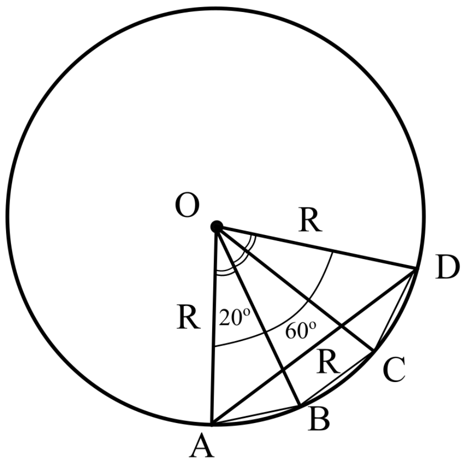
   Ответ. Да, такие числа существуют, можно привести пример.

2. Имеется десятизначное число, для записи которого использованы все десять цифр, при этом ноль не стоит на первом месте. Цифры этого числа переписали в обратном порядке и полученную последовательность приписали справа к первоначальному числу. Докажите, что получившееся двадцатизначное число делится на 99.

   Решение. Сумма всех цифр первого десятизначного числа равна 45, сумма всех цифр полученного числа равна 90. Значит, оно делится на 9. Каждая цифра первого десятизначного числа при переписывании числа в обратном порядке изменит номер своего расположения на новый номер другой четности – первая станет двадцатой, вторая – девятнадцатой, третья - восемнадцатой и т.д. Поэтому сумма цифр, стоящих на четных местах полученного двадцатизначного числа равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах. Значит, это число делится на 11, т.е. делится на 99.

3. Дана окружность с центром в точке O и радиусом R. На окружности отметили две точки A и B так, что $\angle AOB = 20°$. Докажите, что $AB > \dfrac{1}{3}R$.

   Решение.



   Построим еще два угла, равных $20°$ – $\angle BOC$ и $\angle COD$. Получили $\angle AOD = 60°$, треугольник AOD – равносторонний, $AD = R$. Также $AB = BC = CD$. AD – кратчайшее расстояние между точками A и D, поэтому $R = AD < 3AB$ (Ломаная длиннее, чем отрезок, соединяющий ее концы.)

4. Однажды команда Рыцарей и команда Лжецов встретились в парке и решили покататься на круговой карусели, вмещающей 40 человек (*Карусель "Цепочка", на которой все сидят друг за другом*). Когда они расселись, каждый увидел двоих, одного впереди себя, другого за собой, и сказал: "Хотя бы один из сидящих впереди меня или сзади меня принадлежит к моей команде". Одно место оказалось свободным, и они позвали еще одного Лжеца. Этот Лжец сказал: "Вместе со мной мы можем расположиться на карусели так, чтобы это правило снова было выполнено". Из скольки человек состояла команда Рыцарей? (*Рыцарь всегда говорит правду, Лжец всегда говорит неправду.*)

   Решение. Рассмотрим первоначальную рассадку. Из высказывания каждого Лжеца следует, что ни один из сидящих впереди и сзади него не является Лжецом, т.е. каждый Лжец окружен двумя Рыцарями. Чередоваться Лжецы и Рыцари не могут, так как впереди или сзади каждого Рыцаря должен быть хотя бы один Рыцарь. Поэтому Лжецы и Рыцари в рассадке образуют последовательности ...РРЛРРЛР... Между двумя рыцарями, соседи которых - Лжецы, в первоначальной рассадке можно добавить любое количество Рыцарей, например ...РРЛРРРРРЛР... Поэтому минимальное количество Рыцарей будет только в случае, если выполнена рассадка по тройкам ...РРЛРРЛР... Первоначально занято 39 мест, это число делится на 3, поэтому максимальное число Лжецов – 13, минимальное число Рыцарей – 26. Обратим внимание на то, что если заменить одного Лжеца на Рыцаря, то получим 12 Лжецов, для образования троек необходимо 24 Рыцаря, и еще 3 Рыцаря можно расположить произвольно между другими Рыцарями.

   В условии задачи говорится, что рассадка при появлении еще одного Лжеца проводится заново. Посмотрим, как можно рассадить 40 человек вместе с дополнительным Лжецом. Из его высказывания следует, что рассадить их так, чтобы хотя бы один из сидящих впереди или сзади каждого принадлежал к его же команде, невозможно. Если бы у нас была лишняя тройка Рыцарей, которую мы при первой рассадке разместили свободно, то тогда дополнительный Лжец вместе с двумя из них мог бы образовать тройку ..РРЛ.. Поэтому при первоначальной рассадке больше, чем 26 Рыцарей быть не могло.

   Ответ. Команда Рыцарей состяла из 26 человек.

5. Имеется 12 положительных вещественных чисел. Известно, что отношение любых двух чисел из этого набора не превосходит числа 2. Докажите, что их можно разбить на шесть пар так, что если вычислить суммы чисел в каждой паре, то отношение любых двух из полученных шести сумм не будет превосходить $\frac{3}{2}$.

   Решение. Расположим числа в порядке неубывания
   $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_6 \le x_7 \le \ldots \le x_{11} \le x_{12}$. Обозначим для удобства доказательств числа $x_1 = a, x_6 = b, x_7 = c, x_{12} = d$.

   По условию, $\frac{d}{b} \le 2$, т.е. $d \le 2b$. Аналогично $\frac{b}{a} \le 2$, т.е. $b \le 2a$.

   Построим пары (a, d) и (b, c). Получим суммы $a+d$ и $b+c$. Докажем для них требуемое соотношение. Покажем, что $\frac{a+d}{b+c} \le \frac{3}{2}$.

$$\begin{cases} a \le b \\ d \le 2b \end{cases} \Rightarrow a + d \le b + 2b \Leftrightarrow a + d \le 3b$$

$$3b = \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}b \le \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}c$$

$$a + d \leq 3b \leq \frac{3}{2}(b + c)$$

Это равенство и требовалось доказать.

Далее мы должны показать, что $\dfrac{b+c}{a+d} \leq \dfrac{3}{2}$.

$$\begin{cases} b \leq 2a \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow b + c \leq 2a + d$$

$$2a + d = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a + d \leq \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}d + d = \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}d$$

$$b + c \leq 2a + d \leq \frac{3}{2}(a + d)$$

Разделим все 12 чисел на пары: в каждую пару объединим два числа, находящихся на одинаковом расстоянии от середины. К этим парам можно применить оценку отношений сумм, проделанную выше.

Получаем суммы $(x_1 + x_{12}), (x_2 + x_{11}), (x_3 + x_{10}), (x_4 + x_9), (x_5 + x_8), (x_6 + x_7)$, удовлетворяющие условию.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

9 класс

Решения и ответы

1. Ольга проехала из города на дачу на такси с пересадкой в поселке. Из города до поселка она ехала на "Такси-А", и заплатила за поездку из расчета 6 руб за км. Из поселка до дачи она ехала на "Такси-Б" и заплатила за поездку из расчета 4 руб за км. На следующий день Ольга ехала обратно, и обе фирмы такси поменяли тариф – "Такси-А" за поездку от поселка до города взяло по 3 руб за км, "Такси-Б" взяло за поездку от дачи до поселка по 10 руб за км. Ольга насчитала, что на второй день она заплатила ровно на 100 руб меньше. Могло ли так быть? Оплата поездок в такси производилась за целое число километров, время на посадку и высадку Ольга не оплачивала.

   Решение. Нет, не могло. Разность стоимостей поездки в разные дни на "Такси-А" 3 руб за км, на "Такси-Б" – 6 руб за км. Обе разницы делятся на 3, поэтому, независимо от длины маршрута, изменение стоимости должно быть числом, которое делится на 3. Поэтому заплатить на 100 руб меньше не получится.

   Ответ. Так быть не могло, заплатить ровно на 100 руб меньше невозможно.

2. Докажите неравенство для любых вещественных a, b

$$a^2 + 4b^2 + 4b - 4a + 5 \geq 0$$

   При каких a, b выполняется равенство?

   Решение.

$$a^2 + 4b^2 + 4b - 4a + 5 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$a^2 - 4a + 4 + 4b^2 + 4b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(a-2)^2 + (2b+1)^2 \geq 0$$

   Последнее неравенство получается как сумма двух верных неравенств $(a-2)^2 \geq 0$, $(2b+1)^2 \geq 0$.

   Равенство достигается при $a = 2$, $b = -\frac{1}{2}$, это следует из условия равенства нулю квадратов в последних двух неравенствах.

3. На окружности отметили 2021 точку и соединили эти точки отрезками так, что получился выпуклый вписанный 2021-угольник, разрезанный диагоналями на треугольники. При этом никакие две диагонали не пересеклись во внутренних точках (*общими точками различных диагоналей являются только вершины*). Докажите, что среди полученных треугольников не может быть больше одного остроугольного.

   Решение. Нам дан вписанный многоугольник, разделенный на треугольники. Все полученные треугольники являются вписанными в одну окружность. Центр окружности может лежать внутри только одного треугольника, или оказаться на диагонали, или лежать вне многоугольника. Как известно, треугольник является остроугольным тогда и только тогда, когда центр описанной окружности находится внутри этого треугольника. Поэтому разделение вписанного многоугольника на треугольники непересекающимися диагоналями может содержать не более одного остроугольного треугольника.

4. Дана равнобедренная трапеция. Проведены две окружности: первая окружность касается боковых сторон в вершинах одного основания трапеции, вторая окружность касается боковых сторон в вершинах другого основания трапеции. Диагональ трапеции пересекается с каждой из окружностей, соответственно, получаются две хорды. Докажите, что эти хорды равны.

   Решение. Возможно два варианта расположения окружностей. Первый вариант. Пусть первая окружность отсекает от диагонали BD хорду BK, вторая окружность отсекает от диагонали BD хорду MD. Хорды BK и MD не пересекаются. Требуется доказать, что $BK = MD$. Пусть $BK = x, KM = y, MD = z$. Воспользуемся теоремой о касательной и секущей два раза.

   Из точки B ко второй окружности: $BA^2 = BM \cdot BD = (x+y)(x+y+z)$.

   Из точки D к первой окружности: $DC^2 = DK \cdot DB = (z+y)(x+y+z)$.

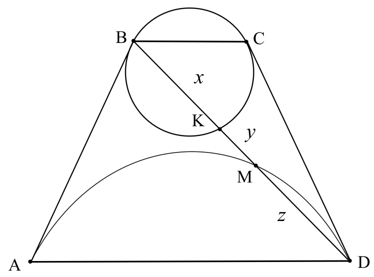
   Так как трапеция равнобедренная, то $BA = DC$. Можно приравнять правые части равенств: $(x+y)(x+y+z) = (z+y)(x+y+z)$. Отсюда $x = z$, что требовалось.

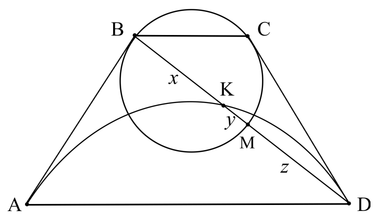
   Второй вариант расположения. Пусть первая окружность отсекает от диагонали BD хорду BM, вторая окружность отсекает от диагонали BD хорду KD. Хорды BM и KD пересекаются по отрезку KM. Требуется доказать, что $BM = KD$. Пусть $BK = x, KM = y, MD = z$. Воспользуемся теоремой о касательной и секущей два раза.

   Из точки B ко второй окружности: $BA^2 = BK \cdot BD = x(x+y+z)$.

   Из точки D к первой окружности: $DC^2 = DM \cdot DB = z(x+y+z)$.

   Приравниваем правые части, получаем $x(x+y+z) = z(x+y+z)$. В этом случае тоже получаем $x = z$. $BM = x+y, KD = z+y, BM = KD$.





5. Уравнение $x^3+px^2+qx+r=0$, где p, q, r – целые, имеет три различных целых корня x_1, x_2, x_3. Докажите, что числа q и r не имеют общих делителей тогда и только тогда, когда числа в каждой из пар $(x_1,\ x_2)$, $(x_2,\ x_3)$, $(x_3,\ x_1)$ не имеют общих делителей.

   Решение. Так как уравнение имеет три различных корня x_1, x_2, x_3, то левая часть может быть разложена на множители

$$x^3+px^2+qx+r = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

   Раскроем скобки справа

$$x^3+px^2+qx+r = x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3$$

   Получаем $q = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1,\ r = -x_1x_2x_3$.

   Перейдем к доказательству. Пусть корни попарно не имеют общих делителей. Пусть простое число k является делителем первого корня x_1. Тогда k является делителем r. Так как r является произведением трех корней, то любой его делитель является делителем какого-то из множителей, т.е. делителем какого-то корня. Из того, что корни не имеют общих делителей, следует, что любой делитель k является делителем ровно одного корня. Корень x_1 входит в два слагаемых, составляющих q, и не входит в слагаемое x_2x_3. Поэтому k не является делителем q, и числа q и r не имеют общих делителей.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть q и r не имеют общих делителей. Пусть простое число k является делителем r. Тогда это число или является делителем одного корня, например, x_1, или двух корней, например, x_1 и x_2. Но если k является делителем двух корней, то q делится на k, а это противоречит тому, что q и r не имеют общих делителей. Значит, каждый простой делитель числа r является делителем только одного корня, и корни не имеют общих делителей.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

10 класс

Решения и ответы

1. Имеется 20 яблок, каждые два яблока отличаются по весу не более, чем на 40 грамм. Докажите, что эти яблоки можно разделить на две кучки по 10 яблок так, чтобы эти кучки отличались по весу не более, чем на 40 грамм.

   Решение. Возьмем четыре яблока и расположим их веса в порядке неубывания $a \leq b \leq c \leq d$. Сделаем две кучки из двух яблок каждая, сгруппировав самое тяжелое с самым легким. По условию, верны два неравенства.

   $$0 \leq d - a \leq 40,$$
   $$0 \leq c - b \leq 40$$

   Умножим второе на (-1) и сложим неравенства.

   $$0 \leq d - a \leq 40$$
   $$-40 \leq -(c - b) \leq 0$$

   $$-40 \leq (d - a) - (c - b) \leq 40$$

   Это доказывает, что кучки отличаются по весу не более, чем на 40 грамм (как в одну, так и в другую сторону).

   Теперь возьмем еще два яблока, их веса e и f снова расположим в порядке возрастания: $e \leq f$. Возьмем уже полученные кучки и упорядочим их по весу. Пусть их веса X, Y и $X \leq Y$. Добавим к более тяжелой кучке Y более легкое яблоко e, а к X добавим f. Снова напишем два неравенства (первое из них мы доказали) и повторим оценку весов новых кучек.

   $$0 \leq Y - X \leq 40, \qquad 0 \leq Y - X \leq 40$$
   $$0 \leq f - e \leq 40 \qquad -40 \leq -(f - e) \leq 0$$

   $$-40 \leq (Y - X) - (f - e) \leq 40$$

   Новые кучки по три яблока снова отличаются по весу не более, чем на 40 грамм. Продолжив так еще семь раз, разделим яблоки на две кучки по 10 яблок.

   Дополнение. Существуют разные способы сгруппировать яблоки в кучки, приводящие к верному решению.

2. Докажите, что при всех вещественных a, b, c, d выполняется неравенство

   $$(ab + 1)^2 + (cd + 1)^2 + (ac)^2 + (bd)^2 \geq 1$$

   Решение. Раскроем скобки.

   $$(ab + 1)^2 + (cd + 1)^2 + (ac)^2 + (bd)^2 \geq 1 \Leftrightarrow$$

   $$(ab)^2 + 2ab + 1 + (cd)^2 + 2cd + 1 + (ac)^2 + (bd)^2 \geq 1 \Leftrightarrow$$

   Стремимся выделить квадрат суммы. Догадаемся прибавить и вычесть $2abcd$. Вычтем 1 слева и справа.

   $$(ab)^2 + 2abcd + (cd)^2 + 2ab + 2cd - 2abcd + (ac)^2 + (bd)^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

Выделяем квадрат суммы. Оставшиеся слагаемые позволяют сгруппировать их в еще один квадрат суммы и квадрат разности.

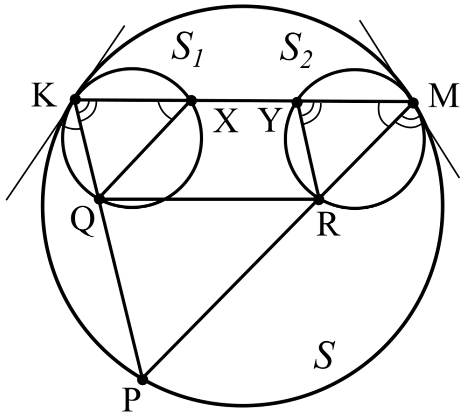
$$(ab+cd)^2 + 2(ab+cd) + 1 + (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(ab+cd+1)^2 + (ac-bd)^2 \geq 0$$

Получившееся неравенство является следствием двух верных неравенств $(ab+cd+1)^2 \geq 0$ и $(ac-bd)^2 \geq 0$.

3. Две равные окружности S_1 и S_2 касаются изнутри окружности S в точках K и M. Точка P – произвольная точка окружности S. Точки Q и R – точки пересечения KP и MP с окружностями S_1 и S_2 соответственно. Докажите, что прямые KM и QR параллельны.

Решение.



Пусть KM пересекает окружности S_1 и S_2 в точках X и Y. Окружности S и S_1 имеют общую касательную в точке K (*Этот факт считается известным, его можно не доказывать.*) Применим теорему об угле между хордой и касательной к хордам KQ и KP. На эти хорды в соответствующих окружностях опираются вписанные углы $\angle KXQ$ и $\angle KMP$, поэтому эти углы равны. Аналогично $\angle MYR = \angle MKP$. Отсюда треугольники KQX и MRY подобны, а так как у них равны радиусы описанных окружностей, то эти треугольники равны. Отрезки KQ и YR параллельны и равны, т.е. $KQRY$ – параллелограмм, что доказывает параллельность отрезков KM и QR.

Дополнение. Существуют решения, основанные на построении центральных углов и тройном использовании теоремы о величине вписанного угла.

4. Как известно, из пяти различных чисел можно получить десять различных групп по три числа. Существуют ли пять таких различных натуральных чисел, что их суммы по три числа являются десятью последовательными числами?

Решение. Обозначим пять чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Для удобства выпишем все десять сумм.

$$\begin{array}{ccccc} x_1+x_2+x_3 & x_1+x_2+x_4 & x_1+x_2+x_5 & x_1+x_3+x_4 & x_1+x_3+x_5 \\ x_1+x_4+x_5 & x_2+x_3+x_4 & x_2+x_3+x_5 & x_2+x_4+x_5 & x_3+x_4+x_5 \end{array}$$

Рассмотрим четность всех десяти сумм.

Если все числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 четны или все нечетны, то суммы или все четны, или все нечетны.

Если среди этих пяти чисел одно четное, например, x_1, то получим шесть четных сумм и четыре нечетные.

Если среди этих пяти чисел два четных, например, x_1 и x_2, то получим шесть четных сумм и четыре нечетные.

Если среди этих пяти чисел три четных, например, x_1, x_2 и x_3, то получим четыре четные суммы и шесть нечетных.

Если среди этих пяти чисел четыре четных, например, $x_1, x_2 x_3$ и x_4, то получим четыре четные суммы и шесть нечетных.

Во всех случаях число нечетных сумм не равно числу нечетных, а десять последовательных чисел – это пять четных и пять нечетных, поэтому такие пять чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 найти невозможно.

Дополнение. Существует другое решение, основанное на построении различных упорядоченных по возрастанию сумм. Противоречие получается в том, что пять упорядоченных чисел дают десять упорядоченных сумм, отличающихся друг от друга на единицу, и их порядок противоречит первоначальному порядку чисел. Из-за большого числа необходимых преобразований, это решение не приводится.

Ответ. Таких чисел не существует.

5. Даны две функции (*все переменные и коэффициенты – вещественные*)

$$f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad g(x) = x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

Известно, что равенство $f(x) = g(x)$ не выполняется ни при каких значениях x. Докажите, что равенство $f(x+1) = g(x-1)$ выполняется хотя бы при одном значении переменной x.

Решение. Равенство $f(x) = g(x)$ переписывается как

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$
$$(a_3 - b_3)x^3 + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0$$

Если $a_3 \neq b_3$, то это – уравнение третьей степени, и оно имеет хотя бы одно решение. Так как сказано, что решений нет, то или $a_3 = b_3$ и уравнение является уравнением второй степени с отрицательным дискриминантом, или все коэффициенты перед степенями x равны 0, при этом $a_0 \neq b_0$. В любом случае, $a_3 = b_3$.

Для $f(x+1)$ и $g(x-1)$ получаем следующие выражения.

$$f(x+1) = (x+1)^4 + a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0 = x^4 + (a_3+4)x^3 + \ldots + a_0$$

$$g(x-1) = (x-1)^4 + b_3(x-1)^3 + b_2(x-1)^2 + b_1(x-1) + b_0 = x^4 + (b_3-4)x^3 + \ldots + b_0$$

Здесь точки заменяют слагаемые, не содержащие третьи степени x.

Равенство $f(x+1) = g(x-1)$ можно переписать как

$$x^4 + (a_3+4)x^3 + \ldots + a_0 = x^4 + (b_3-4)x^3 + \ldots + b_0$$

С учетом $a_3 = b_3$ получаем

$$8x^3 + \ldots = 0$$

Получили уравнение третьей степени, оно имеет хотя бы одно решение.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2021-2022 уч.год

11 класс

Решения и ответы

1. При каких значениях a уравнения

$$x^2 + ax + 1 = 0 \qquad \text{и} \qquad x^2 + x + a = 0$$

имеют хотя бы один общий корень?

Решение. Пусть x_0 – общий корень уравнений. Подставляем в уравнения, приравниваем выражения для x_0^2.

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 1 = 0, \\ x_0^2 + x_0 + a = 0 \end{cases} \qquad ax_0 + 1 = x_0 + a$$

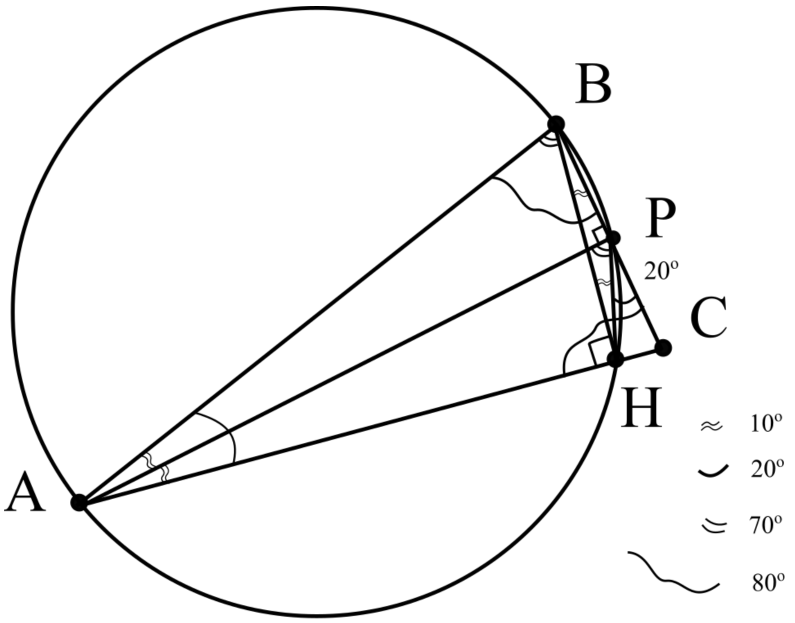
$$(a-1)x_0 = a - 1 \qquad (a-1)(x_0 - 1) = 0$$

Получаем два варианта. При $a = 1$ уравнения совпадают, $x^2 + x + 1 = 0$ корней не имеет. При $x_0 = 1$ подстановкой получаем $a = -2$.

Ответ. При $a = -2$.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH и биссектриса AP. Найдите углы этого треугольника, если известно, что вокруг четырехугольника $ABPH$ можно описать окружность, и $\angle CPH = 20°$.

Решение.



Угол $\angle AHB$ – вписанный и прямой, поэтому AB – диаметр окружности, описанной вокруг четырехугольника $ABPH$. Получаем, что угол $\angle APB$ также прямой. Так как $\angle CPH = 20°$, то $\angle APH = 70°$. Из этого далее находим, что $\angle ABH = 70°$, он опирается на ту же дугу, что и $\angle APH$. Теперь в прямоугольном треугольнике ABH мы знаем два угла, можем найти угол $\angle BAH$. Получаем $\angle BAH = 20°$. Из того, что AP – биссектриса этого угла, следует, что $\angle BAP = \angle HAP = 10°$. Углы $\angle HAP$ и $\angle HBP$

опираются на одну дугу, поэтому $\angle HBP = 10°$. Можем найти оставшиеся углы треугольника. $\angle ABC = \angle ABH + \angle HBP = 70° + 10° = 80°$. В треугольнике ABC биссектриса AP совпадает с высотой, поэтому он равнобедренный, и $\angle ABC = \angle ACB = 80°$.

Ответ. $\angle ABC = \angle ACB = 80°$, $\angle BAC = 20°$.

3. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – многочлены степени 2021. Известно, что при всех вещественных x выполняется $F(F(x)) = G(G(x))$ и существует такое вещественное число $k, k \neq 0$, что при всех вещественных x выполняется $F(kF(F(x))) = G(kG(G(x)))$. Найдите степень многочлена $F(x) - G(x)$.

   Решение. Так как $F(F(x)) = G(G(x))$, то $F(kG(G(x))) = G(kG(G(x)))$. Это равенство выполняется при всех x, т.е. больше, чем при 2022 значениях переменной (Так как многочлен $G(x)$ принимает бесконечное число значений). Поэтому многочлены совпадают, их разность имеет степень 0.

   Ответ. Степень $F(x) - G(x)$ равна 0, многочлены совпадают.

4. Внутри треугольника отметили несколько точек. Точки соединили цветными отрезками так, что в каждой отмеченной точке сходится три отрезка, и каждая вершина треугольника соединена одним цветным отрезком с какой-то из отмеченных точек. Оказалось, что проведенные отрезки раскрашены в три цвета так, что в кажой отмеченной точке сходятся три отрезка разного цвета. Докажите, что отрезки, проведенные в вершины треугольника, окрашены в разные цвета.

   Решение. Пусть число отмеченных точек внутри треугольника равно n. Пусть из трех отрезков, соединяющих вершины треугольника с отмеченными точками, k_1 – число отрезков первого цвета, k_2 – число отрезков второго цвета, k_3 – число отрезков третьего цвета ($k_1 + k_2 + k_3 = 3$, $0 \leq k_i \leq 3$). Тогда число всех отрезков первого цвета равно $\dfrac{n+k_1}{2}$, число всех отрезков второго цвета равно $\dfrac{n+k_2}{2}$, число всех отрезков третьего цвета равно $\dfrac{n+k_3}{2}$. Здесь учтено, что когда мы считаем общее число отрезков, суммируя числа отрезков, сходящихся в каждой вершине, мы каждый отрезок учитываем дважды (*"число ребер равно половине суммы степеней всех вершин"*). В числителях дробей стоят четные числа. Поэтому числа k_1, k_2, k_3 имют одинаковую четность. Так как $k_1 + k_2 + k_3 = 3$, то они могут быть только нечетными, равными 1. Это доказывает, что отрезки, проведенные в вершины треугольника, имеют разные цвета. Попутно доказали, что такая раскраска невозможна, если отмечено четное число точек.

5. Пусть S – набор из n различных вещественных положительных чисел ($n \geq 3$). Докажите, что максимально возможное число различных натуральных степеней числа 3, которые могут быть представлены как сумма трех различных элементов S, равно $n - 2$.

   Решение.

   Доказательство оценки проведем методом математической индукции по n.

   База индукции при $n = 3$ вытекает из условия задачи и из существования единтвенной возможной суммы в этом случае.

   Добавим проверку базы при $n = 4$. Пусть имеются четыре числа a, b, c, d. Пусть d – наибольшее из этих чисел. Тогда выполняется неравенство для суммы трех чисел: $d < b + c + d < 3d$. На промежутке от d до $3d$ можно встретить только одну степень 3. Действительно, если предположить $d < 3^t < 3 \cdot 3^t < 3d$, то $\dfrac{d}{3^t} < 1$ (левое неравенство), тогда $3\dfrac{d}{3^t} < 3$ (умножили на 3), но $3 < 3\dfrac{d}{3^t}$ (правое неравенство). Поэтому d может войти в представление в виде суммы не более, чем одной степени 3 (любая сумма трех чисел меньше, чем $3d$, и ее не хватит, чтобы получить что-то большее, чем $3d$). Так как без d существует только одна сумма $a+b+c$, в случае множества S, состоящего из четырех чисел, можно получить не более двух степеней 3.

Выполним индукционный переход. Пусть для любого множества S, состоящего из n чисел, утверждение верно. Рассмотрим множество S_1, в котором на одно число больше (S и S_1 в общем случае отличаются набором чисел). Пусть снова d – наибольшее число, входящее в S_1. Рассуждая полностью аналогично, мы видим, что существует только одна степень числа 3, которую можно получить как $b+c+d=3^t$, где одно из слагаемых равно d. С другими слагаемыми можно получить не более, чем $n-2$ степеней тройки, по индукционному предположению (эти слагаемые образуют множество из n элементов, удовлетворяющее условию). Поэтому общее число степеней тройки, представимых в виде суммы трех элементов множества S_1, не больше $n-2+1=n-1$. Оценка сверху доказана.

Приведем пример, что такое множество можно построить. Пусть

$$S=\{1,2,3^2-3,3^3-3,\dots,3^n-3\}$$

Каждый элемент 3^i-3 может участвовать ровно в одной сумме, дающей степень тройки (любые два или три не дают степень тройки, это проверяется сложением 3^i-3+3^j-3). Поэтому число таких сумм равно $n-2$.