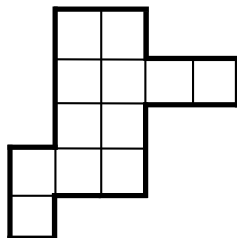
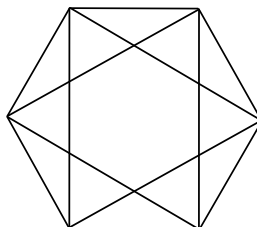


Ленинградская область  
Всероссийская олимпиада школьников по математике  
Муниципальный этап  
2020-2021 уч.год  
5 класс

1. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке, на две части, одинаковые и по форме, и по площади. Разрезы проводятся по линиям сетки.



2. На полке стоят в ряд игрушечные машинки: легковая, автобус, грузовик и фургон. Они окрашены в разные цвета: красный, синий, жёлтый, зелёный. Известно, что синяя машинка стоит между красной и зелёной; справа от жёлтой машинки стоит фургон; автобус стоит правее и легкой, и фургона; легковая стоит не с краю; красная и жёлтая машинки стоят не рядом. Определите, в каком порядке стоят машинки и какого они цвета.
3. Сосчитайте, сколько треугольников изображено на рисунке. Поясните свой способ счета.



4. В трехзначном числе цифры сотен и единиц одинаковые. Найдите все такие числа, если известно, что каждое из них делится на 15.
5. Вдоль тропинки росли ромашки. Между каждыми двумя ромашками вырос василек, а затем между каждым васильком и ромашкой - одуванчик. Оказалось, что теперь вдоль тропинки растет 101 цветок. Сколько ромашек растет вдоль тропинки?
6. Участники летнего физико-математического лагеря школьников получили в подарок или оранжевую, или фиолетовую футболку. Число участников физической группы, получивших оранжевую футболку, равно числу участников математической группы, получивших фиолетовую футболку. Кого больше - участников математической группы, или получивших оранжевую футболку?

*Продолжительность выполнения заданий – 3 астрономических часа (180 минут).  
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 42 балла за все задание.  
Не забудьте обосновать свои решения задач!*

Ленинградская область  
Всероссийская олимпиада школьников по математике  
*Муниципальный этап*  
2020-2021 уч.год  
6 класс

1. Имеются два ведра, одно 7 литров, второе 3 литра. Имеется кран и раковина, они позволяют набрать любое количество воды и, при необходимости, вылить ее. Напишите последовательность действий, как, наливая и выливая воду из ведер, можно отмерить ровно 1 литр воды. Продолжите дальше и покажите, как получить 2, 4, 5, 6 литров воды. Вспомогательной посуды нет.
2. В классе учится 28 человек. В один день каждый принес по три фломастера, красный, зеленый, синий. Могут ли ученики класса обменяться фломастерами так, чтобы у каждого оказалось три фломастера одного цвета?
3. Перед телевизором сидят три подружки-спорщицы. Про каждую из них известно, что она или всегда во всем права, или всегда во всем ошибается. Первая сказала: "Ни одна из нас не видела этот фильм". Вторая сказала: "Я видела этот фильм, а вы обе не видели". Третья сказала: "Я видела этот фильм". Определите, сколько среди этих подружек таких, которые всегда правы, если известно, что какая-то из них сказала все верно, а какая-то ошиблась.
4. Докажите, что при любых целых  $n$  произведение  $(n + 3)(n + 7)(n + 11)$  делится на 3.
5. Нарисуйте восемь точек и соедините их отрезками так, чтобы отрезки не пересекались, и каждая точка была бы концом ровно четырех отрезков.
6. Существуют ли три различных натуральных (*целых положительных*) числа, таких, что сумма любых двух из них является простым числом?

*Продолжительность выполнения заданий – 3 астрономических часа (180 минут).*

*Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 42 балла за все задание.*

*Не забудьте обосновать свои решения задач!*

Ленинградская область  
Всероссийская олимпиада школьников по математике  
*Муниципальный этап*  
2020-2021 уч.год  
7 класс

1. Можно ли разрезать квадрат на десять квадратов? Приведите пример или докажите, что способа разрезать не существует.
2. Найдите и опишите закономерность, по которой составлен ряд чисел. Определите следующее число этого ряда.

112, 224, 448, 8816, 6612

3. В магазине торговали яблоками. Во второй день продали четверть от количества яблок, проданных в первый день, и еще восемь килограмм. В третий день продали четверть от количества яблок, проданных во второй день, и еще восемь килограмм. Сколько килограммов яблок продали в первый день, если в третий день продали 18 килограммов?
4. На столе лежит три кучки конфет, в первой 10 штук, во второй – 20 штук, в третьей – 30 штук. Маша и Рита играют в игру – по очереди делят одну любую кучку, лежащую на столе, на две части. Игра заканчивается, когда кто-то из девочек не может сделать ход и тем самым проигрывает. Первая ходит Маша. Кто выиграет в этой игре?
5. Десять футбольных команд в течение двух лет подряд провели два турнира. Каждый год результаты турнира записали в таблицу, в которых указали места команд с первого по десятое. Команда считается стабильной, если найдется хотя бы одна другая команда, стоящая ниже в каждой из двух таблиц. Какое минимальное и максимальное количество стабильных команд может оказаться по результатам двух турниров?
6. Напишите все простые числа, которые нельзя представить в виде суммы двух составных чисел.

*Продолжительность выполнения заданий – 4 астрономических часа (240 минут).  
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 42 балла за все задание.  
Не забудьте обосновать свои решения задач!*

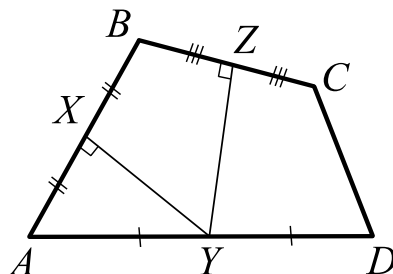
Ленинградская область  
Всероссийская олимпиада школьников по математике  
Муниципальный этап  
2020-2021 уч.год  
8 класс

1. От Центральной площади до вокзала идет прямая улица, которая разделена 11-ю перекрестками на 12 одинаковых кварталов. На каждом перекрестке установлен светофор. Все светофоры одновременно включают зеленый сигнал на 3 минуты, затем на 1 минуту одновременно включают красный сигнал. Автобусу требуется две минуты на то, чтобы проехать квартал (от перекрестка до перекрестка), легковой автомобиль проезжает один квартал за минуту. Автобус и автомобиль одновременно выезжают от площади, в этот момент на всех светофорах загорается зеленый. Какое транспортное средство первым приедет на вокзал, и на сколько минут раньше?
2. Найдите все решения уравнения

$$x^4 = y^2 + 2y + 2$$

где  $x, y$  – целые числа.

3. Студент Петя хранит свои файлы на флешках и на переносных жестких дисках, причем у него число файлов на переносных дисках больше, чем число файлов на флешках. Количество файлов с фотографиями у Пети больше, чем файлов с текстами. Обязательно ли на переносных дисках у Пети есть файлы с фотографиями?
4. В четырехугольнике  $ABCD$  точки  $X, Y, Z$  – середины отрезков  $AB, AD, BC$  соответственно. Известно, что  $XY$  перпендикулярен  $AB$ ,  $YZ$  перпендикулярен  $BC$ , величина угла  $ABC$  равна  $100^\circ$ . Найдите величину угла  $ACD$ .



5. Существуют ли такие шесть натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого из них делится на каждое из остальных?

*Продолжительность выполнения заданий – 4 астрономических часа (240 минут).*

*Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.*

*Не забудьте обосновать свои решения задач!*

Ленинградская область  
Всероссийская олимпиада школьников по математике  
*Муниципальный этап*  
2020-2021 уч.год  
9 класс

1. В магазин привезли новую серию "Киндер-сюрпризов" – шоколадных яиц, в каждом из которых находится одна игрушечная машинка. Продавец сказал Пете, что в новой серии всего пять различных видов машинок, и по внешнему виду невозможно определить, какая машинка внутри. Какое минимальное количество "Киндер-сюрпризов" должен купить Петя, чтобы гарантированно иметь три машинки одного, неважно какого, вида?
2. Докажите неравенство для любых вещественных  $a, b, c$

$$5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4bc + 4ac$$

При каких  $a, b, c$  выполняется равенство?

3. Четырехугольник  $ABCD$  описан вокруг окружности. Вершины  $A, B, C, D$  являются центрами окружностей  $S_1, S_2, S_3, S_4$  соответственно. Окружности  $S_1$  и  $S_2$  касаются внешним образом в точке  $X$ , аналогично  $S_2$  и  $S_3$  касаются в точке  $Y$ ,  $S_3$  и  $S_4$  – в точке  $Z$ ,  $S_4$  и  $S_1$  – в точке  $V$ . Докажите, что существует окружность, описанная вокруг четырехугольника  $XYZV$ .
4. Пусть  $S$  – сумма цифр некоторого пятизначного числа, все цифры которого разные и ненулевые. Выписали все пятизначные числа, полученные перестановкой цифр исходного числа, а затем все выписанные числа, включая и исходное число, сложили. Докажите, что полученная сумма делится на  $S$ .
5. Таблица  $3 \times 3$  первоначально заполнена ноликами. За один ход в таблице выбирается любой квадрат  $2 \times 2$ , и в нем все нолики заменяются на крестики, а все крестики – на нолики. Назовем "рисунком" любое расположение крестиков и ноликов в таблице. Сколько различных рисунков можно получить в результате выполнения таких ходов? Рисунки, получающиеся один из другого в результате поворота на  $90^\circ$  или  $180^\circ$  градусов, считаем разными.

*Продолжительность выполнения заданий – 4 астрономических часа (240 минут).  
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.*

Ленинградская область  
Всероссийская олимпиада школьников по математике  
Муниципальный этап  
2020-2021 уч.год  
10 класс

1. 50 учениц с пятого по девятый класс опубликовали в Инстаграмме суммарно 60 фотографий, каждая не меньше одной. Все ученицы одного класса (одной параллели) опубликовали равное число фотографий, а ученицы разных классов (разных параллелей) – разное. Сколько учениц опубликовали по одной фотографии?

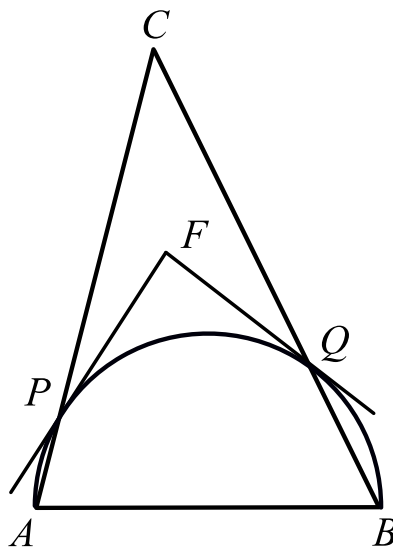
2. Найдите значение выражения

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 2018^2 + 2020^2 - 1^2 - 3^2 - 5^2 - \dots - 2017^2 - 2019^2$$

3.  $a$  и  $b$  – положительные числа, и  $a + b = 2$ . Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} \geq 1$$

4. В остроугольном треугольнике  $ABC$  сторона  $AB$  является диаметром окружности, которая пересекает боковые стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Касательные к окружности, проведенные в точках  $P$  и  $Q$ , пересекаются в точке  $F$ . Докажите, что прямые  $CF$  и  $AB$  перпендикулярны.

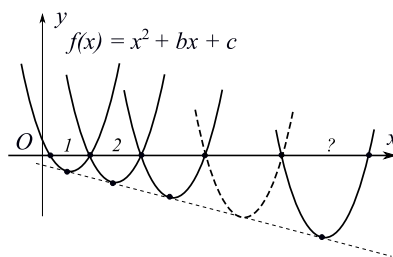


5. Даны натуральные числа 1, 2, 3 ..., 10, 11, 12. Разделите их на две группы так, чтобы частное от деления произведения всех чисел первой группы на произведение всех чисел второй группы было бы целым числом, и принимало наименьшее возможное значение. Чему равно это частное?

*Продолжительность выполнения заданий – 4 астрономических часа (240 минут).  
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.*

Ленинградская область  
Всероссийская олимпиада школьников по математике  
Муниципальный этап  
2020-2021 уч.год  
11 класс

1. Существуют ли в пространстве четыре различные точки, такие, что у любых трех из них нет совпадающих значений координат, но любые две из них имеют одну совпадающую координату?
2. Найдите все вещественные корни уравнения
$$(x+1)^5 + (x+1)^4(x-1) + (x+1)^3(x-1)^2 + (x+1)^2(x-1)^3 + (x+1)(x-1)^4 + (x-1)^5 = 0$$
3. На плоскости находятся четыре точки  $A, B, C, D$ . Известно, что  $AB = 1$ ,  $BC = 2$ ,  $CD = \sqrt{3}$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $\angle BCD = 90^\circ$ . Найдите  $AD$ .
4. Сумма нескольких натуральных чисел равна 972. Чему равно наибольшее возможное значение их произведения?
5. Параболы на рисунке получены сдвигом параболы  $f(x) = x^2$  и размещены так, что точки их пересечения с осью  $OX$  соответственно попарно совпадают, а все вершины лежат на одной прямой. Всего парабол 2020. Длина отрезка оси  $OX$ , заключенного между корнями первой параболы, равна 1; длина отрезка, заключенного между корнями второй параболы, равна 2. Найдите длину отрезка оси  $OX$ , заключенного между корнями последней параболы.



Продолжительность выполнения заданий – 4 астрономических часа (240 минут).  
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.