Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

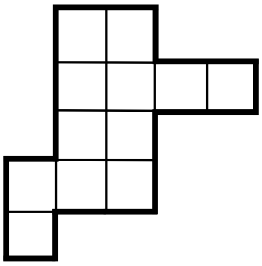
Муниципальный этап

2020-2021 уч.год

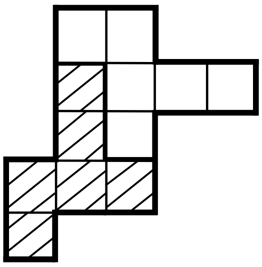
5 класс

Решения и ответы

1. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке, на две части, одинаковые и по форме, и по площади. Разрезы проводятся по линиям сетки.



Решение.



Достаточно привести верный разрез или показать две полученные фигуры.

2. На полке стоят в ряд игрушечные машинки: легковая, автобус, грузовик и фургон. Они окрашены в разные цвета: красный, синий, жёлтый, зелёный. Известно, что синяя машинка стоит между красной и зелёной; справа от жёлтой машинки стоит фургон; автобус стоит правее и легковой, и фургона; легковая стоит не с краю; красная и жёлтая машинки стоят не рядом. Определите, в каком порядке стоят машинки и какого они цвета.

Решение. Читаем заданные условия и последовательно расставляем цвета и машинки.

Первая фраза позволяет расставить три цвета двумя способами.

К С З или З С К

Желтая машинка стоит слева от этих трех, так как справа от нее – фургон.

Ж	К	С	З	или	Ж	З	С	К
	Ф					Ф		

Красная и желтая стоят не рядом, что исключает одну из расстановок. Остается

Ж	З	С	К
	Ф		

Фраза "автобус стоит правее и легковой, и фургона" дает три варианта

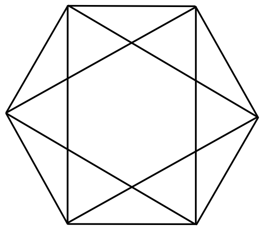
Ж	З	С	К	или	Ж	З	С	К	или	Ж	З	С	К
	Ф	Л	А		Л	Ф		А		Л	Ф	А	

Но последнее условие, что легковая стоит не с краю, оставляет возможной только первую из этих трех расстановок. Получаем ответ.

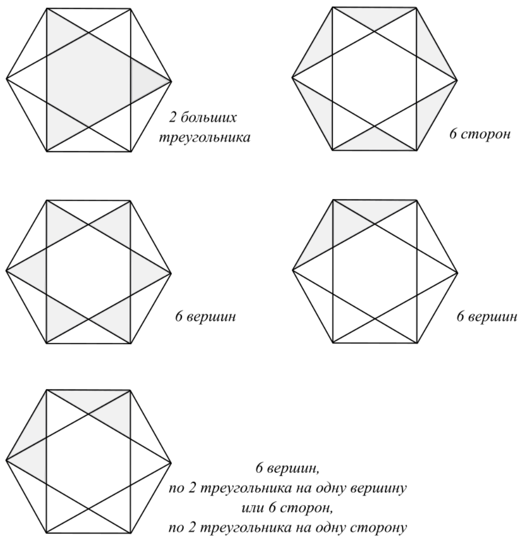
Ж	З	С	К
Г	Ф	Л	А

Ответ. Слева направо: желтый грузовик, зеленый фургон, синяя легковая, красный автобус.

3. Сосчитайте, сколько треугольников изображено на рисунке. Поясните свой способ счета.



Решение. Виды треугольников и их привязка к вершинам или сторонам многоугольника показаны на рисунке.



Всего треугольников $2 + 6 + 6 + 6 + 12 = 32$.
Ответ. 32 треугольника.

4. В трехзначном числе цифры сотен и единиц одинаковые. Найдите все такие числа, если известно, что каждое из них делится на 15.
Решение. Так как искомое число делится на 5, то первая и последняя цифра равны 5, и они не могут быть равными 0. Сумма цифр должна делиться на 3, чтобы число делилось на 3. Получаем, что вторая цифра может быть 2, 5, 8.
Ответ. $525, 555, 585$.

5. Вдоль тропинки росли ромашки. Между каждыми двумя ромашками вырос василек, а затем между каждым васильком и ромашкой - одуванчик. Оказалось, что теперь вдоль тропинки растет 101 цветок. Сколько ромашек растет вдоль тропинки?
Решение. Если в какой то момент растет n цветов, то между ними $n-1$ промежутков,

поэтому между ними вырастает $n-1$ цветок, и всего становится $2n-1$ цветков. (*Отсутствие этой фразы не приводит к снижению баллов за решение*). Перейдем к решению с конца. После появления одуванчиков растет 101 цветок, значит, до этого цветов было $(101+1):2=51$. Получили, что васильков и ромашек вместе 51. Поэтому ромашек $(51+1):2=26$.
Ответ. 26 ромашек.

6. Участники летнего физико-математического лагеря школьников получили в подарок или оранжевую, или фиолетовую футболку. Число участников физической группы, получивших оранжевую футболку, равно числу участников математической группы, получивших фиолетовую футболку. Кого больше - участников математической группы, или получивших оранжевую футболку?
Решение 1. Участники лагеря делятся на четыре непересекающиеся группы, по цвету футболки и предмету обучения. Обозначим число участников каждой группы как ФизОранж, ФизФиолет, МатОранж, МатФиолет. Числа, которые требуется сравнить, можно получить как суммы.
Число участников математической группы = МатОранж + МатФиолет
Число участников, получивших оранжевую футболку = МатОранж + ФизОранж
По условию, ФизОранж = МатФиолет, а первое слагаемое в каждой сумме совпадает. Поэтому суммы равны.
Решение 2. Вначале выдадим всем участникам математического лагеря оранжевые футболки. В этот момент у физиков футболок нет, фиолетовых футболок нет. Затем часть математиков передает свои оранжевые футболки физикам и тут же получает фиолетовые футболки. Выполняется условие "число участников физической группы, получивших оранжевую футболку, равно числу участников математической группы, получивших фиолетовую футболку" (по условию, физиков хватит для такого обмена). Оставшиеся физики получают фиолетовые футболки (оранжевые футболки они получить не могут, нарушится условие задачи). Таким образом, число математиков равно числу участников лагеря, получивших оранжевую футболку.
Ответ. Участников математической группы столько же, сколько человек получили оранжевую футболку.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2020-2021 уч.год

6 класс

Решения и ответы

1. Имеются два ведра, одно 7 литров, второе 3 литра. Имеется кран и раковина, они позволяют набрать любое количество воды и, при необходимости, вылить ее. Напишите последовательность действий, как, наливая и выливая воду из ведер, можно отмерить ровно 1 литр воды. Продолжите дальше и покажите, как получить 2, 4, 5, 6 литров воды. Вспомогательной посуды нет.

   Решение.

   1 литр получаем, два раза последовательно выливая воду из ведра 7 литров в ведро 3 литра. В большом ведре останется 1 литр.

   2 литра получаем, три раза последовательно выливая воду из ведра 3 литра в ведро 7 литров, наполнив его. В малом ведре останется 2 литра.

   4 литра получаем, вылив часть воды из ведра 7 литров в ведро 3 литра, наполнив его. В большом ведре останется 4 литра.

   5 литров получаем так. Берем два литра воды (мы уже умеем получать 2 литра, см. выше), переливаем их в большое ведро, добавляем 3 литра. Пять литров находятся в большом ведре.

   5 литров можно получить вторым способом. Получаем в большом ведре 1 литр (см. выше). Переливаем этот литр в малое ведро. Наполняем большое ведро и отливаем из него воду в трехлитровое, в котором находится 1 литр. В большом ведре останется 5 литров. Если воспользоваться этим способом, то после получения 5 литров можно получить 2 литра, перелив лишнюю воду из большого ведра в пустое трехлитровое.

   6 литров получаем, наполняя большое ведро два раза по 3 литра.

2. В классе учится 28 человек. В один день каждый принес по три фломастера, красный, зеленый, синий. Могут ли ученики класса обменяться фломастерами так, чтобы у каждого оказалось три фломастера одного цвета?

   Решение 1. Предположим, что такой обмен возможен. Возьмем всех учеников, получивших по три красных фломастера. Других учеников, получивших красные фломастеры, по нашему предположению, нет. Отсюда число всех красных фломастеров делится на три. Число красных фломастеров, по условию задачи, равно 28, поэтому мы получили противоречие.

   Решение 2. Будем выдавать фломастеры по три. Сначала раздадим 27 красных, их получат 9 учеников. Затем раздадим 27 зеленых и 27 синих фломастеров, их получат еще 18 учеников. Останется один ученик и три фломастера разных цветов.

   Ответ. Ученики не могут обменяться фломастерами так, чтобы каждый получил три фломастера одного цвета.

3. Перед телевизором сидят три подружки-спорщицы. Про каждую из них известно, что она или всегда во всем права, или всегда во всем ошибается. Первая сказала: "Ни одна из нас не видела этот фильм". Вторая сказала: "Я видела этот фильм, а вы обе не видели". Третья сказала: "Я видела этот фильм". Определите, сколько среди этих подружек таких, которые всегда правы, если известно, что какая-то из них сказала все верно, а какая-то ошиблась.

   Решение. Если первая подружка права, то высказывани второй и третьей неверны. Если вторая подружка права, то высказывания первой и третьей неверны. Если

третья подружка права, то высказывания второй и третьей неверны. Две подружки не могут быть правы одновременно. Так как хотя бы одна из подружек высказала верное утверждение, то верных утверждений ровно одно.
Ответ. Среди подружек ровно одна такая, которая всегда права.

4. Докажите, что при любых целых n произведение $(n+3)(n+7)(n+11)$ делится на 3.
Решение. Задача решается перебором остатков.
Пусть $n = 3k$. В этом случае получаем

$$(n+3)(n+7)(n+11) = (3k+3)(3k+7)(3k+11) = 3(k+1)(3k+7)(3k+11)$$

Это выражение делится на 3.
Пусть $n = 3k+1$. В этом случае получаем

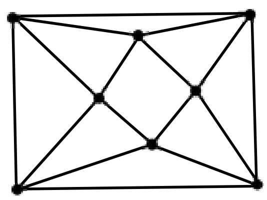
$$(n+3)(n+7)(n+11) = (3k+4)(3k+8)(3k+12) = 3(3k+4)(3k+8)(k+4)$$

Это выражение делится на 3.
Пусть $n = 3k+2$. В этом случае получаем

$$(n+3)(n+7)(n+11) = (3k+5)(3k+9)(3k+13) = 3(3k+5)(k+3)(3k+13)$$

Это выражение делится на 3.

5. Нарисуйте восемь точек и соедините их отрезками так, чтобы отрезки не пересекались, и каждая точка была бы концом ровно четырех отрезков.
Решение. Достаточно привести рисунок. Возможная идея состоит в том, чтобы по-



местить один четырехугольник в другой.

6. Существуют ли три различных натуральных (*целых положительных*) числа, таких, что сумма любых двух из них является простым числом?
Решение. Число 2 не может быть суммой трех целых положительных чисел. Остальные простые числа – нечетные. Пусть три числа, о которых спрашивается в условии задачи, существуют. Сумма первого и второго числа нечетна, значит, одно из этих чисел четно, а второе нечетно. Сумма второго и третьего числа нечетна, значит, одно из этих чисел четно, а второе нечетно. Поэтому первое и третье число или оба одновременно нечетные, или оба одновременно четные. Поэтому сумма первого и третьего числа четна, и не может быть простым числом. Значит, требуемых трех чисел не существует.
Ответ. Таких чисел не существует.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

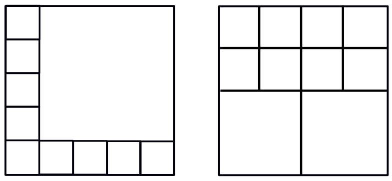
Муниципальный этап

2020-2021 уч.год

7 класс

Решения и ответы

1. Можно ли разрезать квадрат на десять квадратов? Приведите пример или докажите, что способа разрезать не существует.
   Решение. Достаточно привести рисунок. Показано два способа решения.



2. Найдите и опишите закономерность, по которой составлен ряд чисел. Определите следующее число этого ряда.

$$112, 224, 448, 8816, 6612$$

   Решение. Замечаем законометрость: каждое число начинается с двух одинаковых цифр, первые две цифры числа складываются и полученная сумма записывается за ними. Следующее число начинается с двух одинаковых цифр, совпадающих с последней цифрой предыдущего числа. По этому правилу, следующим числом будет 224.
   Ответ. 224.

3. В магазине торговали яблоками. Во второй день продали четверть от количества яблок, проданных в первый день, и еще восемь килограмм. В третий день продали четверть от количества яблок, проданных во второй день, и еще восемь килограмм. Сколько килограммов яблок продали в первый день, если в третий день продали 18 килограммов?
   Решение. Будем рассуждать с конца. В третий день продали 18 кг яблок, если отнять 8 килограммов, то оставшиеся 10 составят четверть от количества, проданного во второй день. Поэтому во второй день продали 40 килограммов яблок. Из них 32 килограмма составляют четверть количества, проданного в первый день. Поэтому в первый день продали 128 килограммов яблок.
   Ответ. 128 килограммов.

4. На столе лежит три кучки конфет, в первой 10 штук, во второй – 20 штук, в третьей – 30 штук. Маша и Рита играют в игру – по очереди делят одну любую кучку, лежащую на столе, на две части. Игра заканчивается, когда кто-то из девочек не может сделать ход и тем самым проигрывает. Первая ходит Маша. Кто выиграет в этой игре?
   Решение. Разделить можно любую кучку, в том числе состоящую из двух конфет. Поэтому игра закончится, когда все конфеты будут разделены на кучки из одной конфеты. Предыдущие ходы не влияют на очередной ход – пока кучки не кончились, можно отделить одну конфету от других. Чтобы разделить 60 конфет, первоначально находящихся в одной большой кучке, на 60 кучек, нужно сделать 59 ходов. По

условию задачи, два хода уже сделаны, имеются три кучки. Осталось сделать 57 ходов. Поэтому последний, нечетный, ход сделает Маша.

Ответ. Выиграет Маша.

5. Десять футбольных команд в течение двух лет подряд провели два турнира. Каждый год результаты турнира записали в таблицу, в которых указали места команд с первого по десятое. Команда считается стабильной, если найдется хотя бы одна другая команда, стоящая ниже в каждой из двух таблиц. Какое минимальное и максимальное количество стабильных команд может оказаться по результатам двух турниров?

   Решение. По результатам двух турниров в таблицах не может оказаться десять стабильных команд, так как ни в одной таблице не найдется команда, стоящая ниже всех десяти команд. Максимальное число стабильных команд – девять, минимальное число стабильных команд – ноль. Привдем примеры расстановки команд в таблицах. Девять стабильных команд получим, если одна и та же команда займет десятое место в каждом из двух турниров. Тогда для каждой из девяти остальных команд условие стабильности будет выполнено.

   Ноль стабильных команд получим с помощью таких двух таблиц за два года

Место	Номер команды
1	1
2	2
3	3
...	...
9	9
10	10

Место	Номер команды
1	10
2	9
3	8
...	...
9	2
10	1

   Перестановка команд в обратном порядке приводит к тому, что во второй год для любой команды не найдется команды, которая стояла ниже ее в первый год.

   Ответ. Минимальное число – 0 стабильных команд, максимальное число – 9 стабильных команд.

6. Напишите все простые числа, которые нельзя представить в виде суммы двух составных чисел.

   Решение. Число 2 нельзя представить в виде суммы двух составных чисел (число 1 не является ни простым, ни составным). Далее рассматриваем только нечетные простые числа.

   Разность между любым простым числом, большим 13, и числом 13, является четным числом. Пусть эта разность для данного простого числа p равна d, т.е. $p - d = 13$. Число 13 имеет необходимое представление в виде суммы, $13 = 9 + 4$. Прибавив к числу 4 число d, мы получим необходимое представление простого числа p в виде суммы 9 и четного числа $4 + d$.

   Перебором вариантов суммирования получаем, что ни одно из чисел $3, 5, 7, 11$ не представляется в виде суммы двух составных чисел.

   Ответ. $2, 3, 5, 7, 11$.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2020-2021 уч.год

8 класс

Решения и ответы

1. От Центральной площади до вокзала идет прямая улица, которая разделена 11-ю перекрестками на 12 одинаковых кварталов. На каждом перекрестке установлен светофор. Все светофоры одновременно включают зеленый сигнал на 3 минуты, затем на 1 минуту одновременно включают красный сигнал. Автобусу требуется две минуты на то, чтобы проехать квартал (от перекрестка до перекрестка), легковой автомобиль проезжает один квартал за минуту. Автобус и автомобиль одновременно выезжают от площади, в этот момент на всех светофорах загорается зеленый. Какое транспортное средство первым приедет на вокзал, и на сколько минут раньше?
Решение. Легковой автомобиль первые три минуты проедет три квартала без препятствий. При подъезде к перекрестку, отделяющему третий квартал от четвертого, автомобиль остановится на светофоре на 1 минуту. Таким образом, чтобы проехать три квартала и начать движение по четвертому кварталу, автомобилю потребуется четыре минуты. Далее движение автомобиля повторится, девятый квартал вместе с перекрестком он покинет через 12 минут. Следующие три квартала автомобиль проедет за 3 минуты, и, так как после двенадцатого квартала нет светофора, он подъедет к вокзалу через 15 минут после выезда от площади.
Автобус проедет первый квартал, первый перекресток и второй квартал без остановки и подъедет к второму перекрестку в тот момент, когда красный свет сменится на зеленый. Поэтому в начале третьего квартала повторится такая же ситуация, как в начале первого квартала – автобус начинает движение по третьему кварталу в момент, когда на светофоре загорелся зеленый. Далее он снова проедет все перекрестки без остановок на светофорах. Время движения автобуса – 24 минуты.
Итак, автомобиль приедет раньше на 9 минут.
Ответ. Первым приедет легковой автомобиль, он опередит автобус на 9 минут.

2. Найдите все решения уравнения
$$x^4 = y^2 + 2y + 2$$
где x, y – целые числа.
Решение. Выделим квадрат суммы в правой части, перенесем квадрат влево и разложим левую часть на множители.
$$x^4 = y^2 + 2y + 1 + 1 \quad x^4 = (y+1)^2 + 1$$
$$x^4 - (y+1)^2 = 1$$
$$(x^2 - y - 1)(x^2 + y + 1) = 1$$
Произведение двух целых множителей равно 1 только тогда, когда оба эти множителя одновременно равны 1 или -1. Решим две системы уравнений.
$$\begin{cases} x^2 - y - 1 = 1, \\ x^2 + y + 1 = 1. \end{cases}$$
Сложим два уравнения.
$$2x^2 = 2.$$

$$\begin{cases} x^2 = 1, \\ y = -1. \end{cases}$$

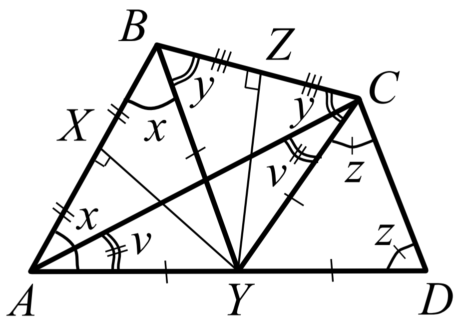
Получили две пары решений $(-1, -1)$ и $(1, -1)$. Решаем вторую систему

$$\begin{cases} x^2 - y - 1 = -1, \\ x^2 + y + 1 = -1. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет, так как приводит к уравнению $2x^2 = -2$.
Ответ. $(-1, -1)$ и $(1, -1)$.

3. Студент Петя хранит свои файлы на флешках и на переносных жестких дисках, причем у него число файлов на переносных дисках больше, чем число файлов на флешках. Количество файлов с фотографиями у Пети больше, чем файлов с текстами. Обязательно ли на переносных дисках у Пети есть файлы с фотографиями?
Решение. Да, на дисках обязательно имеются файлы с фотографиями. Доказательство от противного. Пусть на дисках нет файлов с фотографиями, тогда все диски заняты файлами с текстами. Число файлов на дисках больше, чем на флешках, поэтому число текстовых файлов на дисках больше, чем общее число файлов с текстами и с фотографиями на флешках. Значит, число файлов с текстами больше, чем число файлов с фотографиями. Получили противоречие.
Ответ. На переносных дисках обязательно имеются файлы с фотографиями.

4. В четырехугольнике $ABCD$ точки X, Y, Z – середины отрезков AB, AD, BC соответственно. Известно, что XY перпендикулярен AB, YZ перпендикулярен BC, величина угла ABC равна $100°$. Найдите величину угла ACD.



Решение 1. Треугольники AYB, BYC, AYC и CYD – равнобедренные, это следует из условия. Обозначим равные углы $\angle BAY = \angle ABY = x$, $\angle CBY = \angle BCY = y$, $\angle DCY = \angle CDY = z$, $\angle CAY = \angle ACY = v$ (см.рис.). Нам дано, что $x + y = 100°$. Требуется найти $z + v$.
Сумма углов в четырехугольнике $ABCD$ равна $x + x + y + y + z + z = 360°$. Отсюда $z = 80°$. Вычислим величину угла при вершине равнобедренного треугольника CYD. $\angle CYD = 180° - 2z = 20°$. Этот угол является внешним углом треугольника AYC, поэтому $\angle CYD = 2v$, откуда $v = 10°$. Теперь можем найти величину угла ACD. $\angle ACD = z + v = 80° + 10° = 90°$.
Решение 2. Из условия сразу следует, что треугольники AYB и BYC – равнобедренные, и боковые стороны у них равны между собой и равны отрезкам AY и YD. Получаем, что точка Y – центр окружности, описанной вокруг четырехугольника $ABCD$, при этом AD – диаметр этой окружности. Значит, угол ACD – прямой.
Ответ. $\angle ACD = 90°$.

5. Существуют ли такие шесть натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого из них делится на каждое из остальных?
Решение. Такие числа существуют. Возьмем шесть различных простых чисел p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6. Построим шесть чисел

$$
\begin{aligned}
&a_1 = p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6 \\
&a_2 = p_1 \cdot p_2^2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6 \\
&a_3 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3^2 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6 \\
&\ldots \\
&a_6 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6^2
\end{aligned}
$$

Проверкой убеждаемся, что ни одно из чисел не делится ни на какое-либо другое (из-за наличия квадрата одного из простых чисел в делителе). Возведение любого числа в квадрат дает необходимый квадрат простого числа, и второе условие делимости выполняется.
Ответ. Такие числа существуют.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2020-2021 уч.год

9 класс

1. В магазин привезли новую серию "Киндер-сюрпризов" – шоколадных яиц, в каждом из которых находится одна игрушечная машинка. Продавец сказал Пете, что в новой серии всего пять различных видов машинок, и по внешнему виду невозможно определить, какая машинка внутри. Какое минимальное количество "Киндер-сюрпризов" должен купить Петя, чтобы гарантированно иметь три машинки одного, неважно какого, вида?
Решение. Если Петя купит 10 "Киндер-сюрпризов", то при неблагоприятной для него ситуации он получит по две машинки каждого вида. Если он купит 11 "Киндер-сюрпризов", то получит три машинки какого-то одного вида. Докажем это. Пусть Петя купил 11 "Киндер-сюрпризов", но не получил три машинки одного вида. Это означает, что число машинок не больше, чем 10 (по две машинки одного вида, всего пять видов). Противоречие.
Ответ. Петя должен купить не менее 11 "Киндер-сюрпризов".

2. Докажите неравенство для любых вещественных a, b, c

$$5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4bc + 4ac$$

При каких a, b, c выполняется равенство?
Решение. Преобразуем неравенство, выполнив равносильные преобразования.

$$5a^2 + 5b^2 + 5c^2 - 4ab - 4bc - 4ac \geq 0$$

$$4a^2 - 4ab + b^2 + 4b^2 - 4bc + c^2 + 4c^2 - 4ac + a^2 \geq 0$$

$$(2a - b)^2 + (2b - c)^2 + (2c - a)^2 \geq 0$$

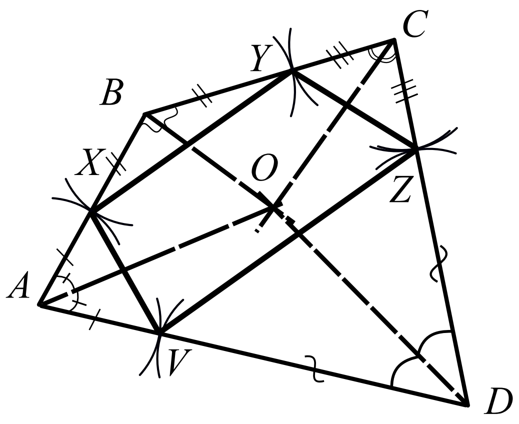
Это неравенство равносильно исходному. Оно верно, так как получено сложением трех верных неравенств.
Неравенство обращается в равенство при выполнении

$$\begin{cases} 2a = b, \\ 2b = c, \\ 2c = a. \end{cases}$$

Последовательно подставляем переменные в уравнения сверху вниз: $b = 2a, c = 4a, 8a = a$. Значит, $a = 0$, решение системы $a = b = c = 0$.
Ответ. Неравенство доказано, оно обращается в равенство при $a = b = c = 0$.

3. Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности. Вершины A, B, C, D являются центрами окружностей S_1, S_2, S_3, S_4 соответственно. Окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке X, аналогично S_2 и S_3 касаются в точке Y, S_3 и S_4 – в точке Z, S_4 и S_1 – в точке V. Докажите, что существует окружность, описанная вокруг четырехугольника $XYZV$.

   Решение. Условие, что две окружности с центрами A и B касаются друг друга в точке X, приводит к тому, что точка X лежит на отрезке AB, соединяющем центры,



и $AX + XB = AB$. Аналогично, $BY + YC = BC$, $CZ + ZD = CD$, $AV + VD = AD$. Треугольники AXV, BXY, CYZ, DZV – равнобедренные. Биссектрисы углов четырехугольника $ABCD$ являются биссектрисами углов этих равнобедренных треугольников, и, следовательно, медианами и высотами. Поэтому биссектрисы углов четырехугольника $ABCD$ являются серединными перпендикулярами к сторонам четырехугольника $XYZV$. Существует вписанная окружность четырехугольника $ABCD$, поэтому все четыре биссектрисы его углов пересекаются в одной точке O. Поэтому все четыре серединных перпендикуляра к сторонам четырехугольника $XYZV$ пересекаются в одной точке, и он является вписанным в некоторую окружность.

Окончание решения может быть проведено иначе. Если доказать, что треугольники AXV, BXY, CYZ, DZV равнобедренные, можно отметить на рисунке их попарно равные углы и затем доказать, что суммы противоположных углов четырехугольника $XYZV$ составляют $180°$.

4. Пусть S – сумма цифр некоторого пятизначного числа, все цифры которого разные и ненулевые. Выписали все пятизначные числа, полученные перестановкой цифр исходного числа, а затем все выписанные числа, включая и исходное число, сложили. Докажите, что полученная сумма делится на S.

   Решение. Пусть данное число имеет вид $a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$. Систематизируем все выписанные числа. Первый раз сделаем так. Сгруппируем все написанные числа в пять групп, в каждой группе первая цифра совпадает. В этих группах по очереди на первом месте стоит каждая из пяти цифр. Внутри одной такой группы соберем вместе все числа, у которых совпадает вторая цифра. Далее, внутри оразовавшихся групп еще раз группируем числа, у которых совпадает третья цифра. Наконец, остается систематизировать два числа по четвертой цифре (пятая цифра определяется однозначно). Мы показали, что все числа собираются в группы равной численности (по $4! = 24$ числа), по сопадающей первой цифре. Но такую же систематизацию можно провести, начав со второй цифры, затем с третьей, и так далее до пятой. Это означает, что для того, чтобы сложить все числа, можно по отдельности сложить все разряды, и в каждом разряде будет одинаковое количество слагаемых, содержащих определенную цифру. Итак, сумма всех чисел представляется в виде суммы по разрядам следующим образом

$$\begin{gathered}(a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) \cdot 4! \cdot 10^4 +\\ (a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) \cdot 4! \cdot 10^3 +\\ (a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) \cdot 4! \cdot 10^2 +\\ (a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) \cdot 4! \cdot 10 +\\ (a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) \cdot 4!\end{gathered}$$

Мы видим, что эта сумма делится на $S = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$.

5. Таблица 3×3 первоначально заполнена ноликами. За один ход в таблице выбирается любой квадрат 2×2, и в нем все нолики заменяются на крестики, а все крестики - на нолики. Назовем "рисунком" любое расположение крестиков и ноликов в таблице. Сколько различных рисунков можно получить в результате выполнения таких ходов? Рисунки, получающиеся один из другого в результате поворота на 90° или 180° градусов, считаем разными.
Решение. Первый способ. Различные рисунки отличаются плюсом или минусом хотя бы в одной клетке таблицы. Символ, стоящий в данной определенной клетке, задается четностью или нечетностью количества выполненных замен в каждом квадрате 2×2, содержащем эту клетку. Каждый квадрат 2×2 содержит ровно одну угловую клетку таблицы, и укаждого такого квадрата угловая клетка своя. Четность или нечетность замен в каждом квадрате соответствует символу, стоящему в его единственной угловой клетке (если в угловой клетке стоит крестик, число замен было нечетным, если стоит нолик – число замен было четным). Поэтому каждая комбинация символов в таблице однозначно соответствует комбинации ноликов и крестиков в угловых клетках таблицы. Так как число различных комбинаций в четырех клетках равно $2^4 = 16$, то всего существует 16 рисунков.
Второй способ. Можно составить таблицу переходов и показать, что при многократном выполнении замен возникают циклы, и одни рисунки переходят в другие. Ниже показаны все имеющиеся возможности расставить крестики и нолики, и количества соответствующих рисунков в одной группе. Рисунки одной группы отличаются друг от друга поворотами на 90° или 180° градусов. Наличие циклов доказывает, что количество рисунков ограничено, и их меньше, чем 2^9.

0	+	+
+	0	+
+	+	0

2 рисунка

+	0	+
0	0	0
+	0	+

1 рисунок

0	0	0
0	0	0
0	0	0

1 рисунок

+	0	+
0	+	+
+	+	0

4 рисунка

0	+	+
0	+	+
0	0	0

4 рисунка

+	0	+
+	0	+
0	0	0

4 рисунка

Ответ. 16 рисунков.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2020-2021 уч.год

10 класс

1. 50 учениц с пятого по девятый класс опубликовали в Инстаграмме суммарно 60 фотографий, каждая не меньше одной. Все ученицы одного класса (одной параллели) опубликовали равное число фотографий, а ученицы разных классов (разных параллелей) – разное. Сколько учениц опубликовали по одной фотографии?

   Решение. Пусть сначала каждая из учениц опубликует по одной фотографии, при этом будет опубликовано 50 фотографий из 60. Остается опубликовать 10 фотографий, назовем их дополнительными. Всего у нас пять разных классов (параллелей), и эти 10 фотографий должны быть опубликованы разными ученицами разных классов, причем в разных количествах. Осталось заметить, что $1+2+3+4=10$, т.е. одну дополнительную фотографию может опубликовать только одна ученица какого-то класса, две дополнительных – другая, из другого класса, и так далее, всего четыре ученицы четырех разных классов. Поэтому по одной фотографии опубликовали 46 учениц из какого-то класса (параллели), а четыре ученицы еще четырех классов опубликовали оставшиеся 14 фотографий, одна – две, одна – три, одна – четыре, одна – пять.

   Ответ. 46 учениц опубликовали по одной фотографии.

2. Найдите значение выражения

$$2^2+4^2+6^2+\ldots+2018^2+2020^2-1^2-3^2-5^2-\ldots-2017^2-2019^2$$

   Решение.

$$\begin{aligned}&2020^2-2019^2+2018^2-2017^2+\ldots+6^2-5^2+4^2-3^2+2^2-1^2=\\&=(2020-2019)(2020+2019)+(2018-2017)(2018+2017)+\ldots+\\&+(6-5)(6+5)+(4-3)(4+3)+(2-1)(2+1)=\\&=2020+2019+2018+2017+\ldots+6+5+4+3+2+1=\\&=\frac{2020+1}{2}\cdot 2020=2041210\end{aligned}$$

   Ответ. 2041210.

3. a и b – положительные числа, и $a+b=2$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\geq 1$$

   Решение. Напишем два равенства.

$$\frac{1}{a^2+1}=\frac{a^2+1-a^2}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}$$

   Аналогично

$$\frac{1}{b^2+1}=1-\frac{b^2}{b^2+1}$$

   Перепишем неравенство в равносильной форме.

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\geq 1$$

$$1 - \frac{a^2}{a^2+1} + 1 - \frac{b^2}{b^2+1} \geq 1$$
$$\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} \leq 1$$

Докажем это неравенство. Используем известное неравенство $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

$$a^2 + 1 \geq 2a$$
$$\frac{1}{a^2+1} \leq \frac{1}{2a}$$
$$\frac{a^2}{a^2+1} \leq \frac{a}{2}$$

Аналогично

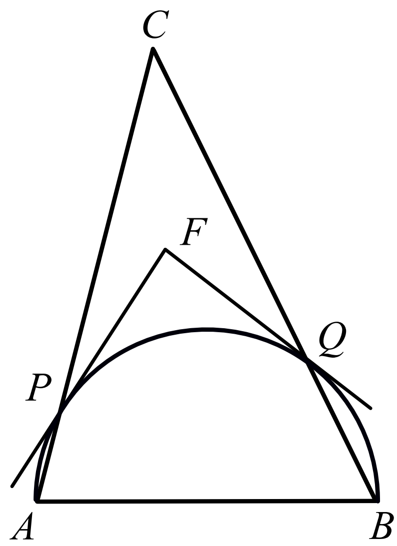
$$\frac{b^2}{b^2+1} \leq \frac{b}{2}$$

Сложим эти неравенства

$$\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 1$$

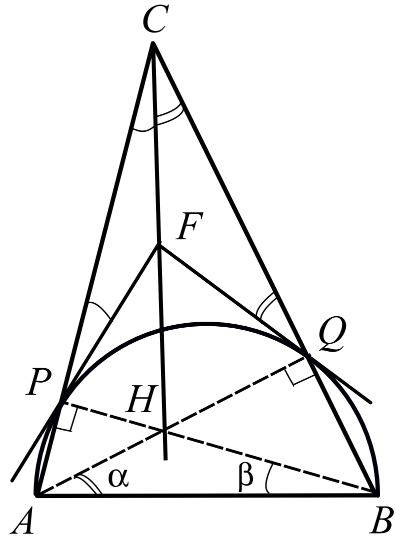
Здесь учтено $a + b = 2$, поэтому правая часть равна 1. Доказанное неравенство равносильно неравенству в условии задачи.

4. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB является диаметром окружности, которая пересекает боковые стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Касательные к окружности, проведенные в точках P и Q, пересекаются в точке F. Докажите, что прямые CF и AB перпендикулярны.



Решение. Проведем отрезки AQ и BP. Они являются высотами треугольника ABC, это непосредственно следует из того, что AB – диаметр. Пусть эти высоты пересекаются в точке H. Докажем, что прямая CF проходит через точку H, тогда она будет содержать высоту треугольника и окажется перпендикулярной AB. Обозначим углы $\angle BAQ = \alpha, \angle ABP = \beta$. По известной теореме, угол между хордой и касательной равен вписанному углу, опирающемуся на эту хорду. Поэтому также выполняются равенства $\angle CQF = \alpha, \angle CPF = \beta$. Далее, $\angle AHB = 180° - \alpha - \beta = \angle PHQ$.

$\angle FPH = 90^\circ - \beta$, $\angle FQH = 90^\circ - \alpha$. Можем вычислить величину угла PFQ. $\angle PFQ = 360^\circ - \angle FPH - \angle FQH - \angle PHQ = 2(\alpha + \beta)$. Теперь заметим, что углы треугольника ABC выражаются через α и β. $\angle CAB = 90^\circ - \beta$, $\angle CBA = 90^\circ - \alpha$, $\angle ACB = \alpha + \beta$. Отрезки касательных FP и FQ равны между собой, можно построить окружность с центром в точке F и радиусом $FP = FQ$. Центральный угол $\angle PFQ$ в два раза больше угла $\angle PCQ$, поэтому точка C лежит на этой же построенной окружности. Мы получили, что $FP = FQ = FC$, поэтому $\angle FCQ = \alpha$. В треугольнике ABC высота, проведенная из вершины C, составляет угол α со стороной CB (это известный факт, вытекающий из подобия двух прямоугольных треугольников с общей вершиной B). Отсюда следует, что прямая CF содержит высоту треугольника.



5. Даны натуральные числа 1, 2, 3 ..., 10, 11, 12. Разделите их на две группы так, чтобы частное от деления произведения всех чисел первой группы на произведение всех чисел второй группы было бы целым числом, и принимало наименьшее возможное значение. Чему равно это частное?

   Решение. Разложим данные нам числа на простые множители и найдем их произведение.
   $$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$$
   Множители 7 и 11 не имеют пары. Один из множителей 3 не имеет пары. Поэтому, чтобы частное было целым, эти простые множители, не имеющие пар, необходимо поставить в числитель. Частное не может получиться меньше, чем дают эти три несократимых множителя. Остальные тройки, пятерки и двойки нужно расставить попарно в числитель и знаменатель так, чтобы пары сократились. Один из способов написан ниже.
   $$\frac{7 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 12} = 231$$
   Ответ. 231.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2020-2021 уч.год

11 класс

1. Существуют ли в пространстве четыре различные точки, такие, что у любых трех из них нет совпадающих значений координат, но любые две из них имеют одну совпадающую координату?
   Решение. Да, существуют, например $A(0,0,0), C(1,1,0), B_1(1,0,1), D_1(0,1,1)$. (Обозначения для точек выбраны исходя из простого способа построить пример – это вершины тетраэдра, вписанного в единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Задача имеет простую геометрическую интерпретацию – можно ли расположить четыре точки в пространстве так, чтобы любая тройка не лежала в одной плоскости, параллельной одной из координатных плоскостей, а любые две лежали бы в такой плоскости.)
   Ответ. Существуют, имеется пример.

2. Найдите все вещественные корни уравнения

$$(x+1)^5+(x+1)^4(x-1)+(x+1)^3(x-1)^2+(x+1)^2(x-1)^3+(x+1)(x-1)^4+(x-1)^5=0$$

Решение. Умножим обе части уравнения на $(x+1)-(x-1)$ (этот множитель равен 2). Воспользуемся формулой $a^6-b^6=(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$.

$$(x+1)^6-(x-1)^6=0$$
$$(x+1)^6=(x-1)^6$$

Уравнение

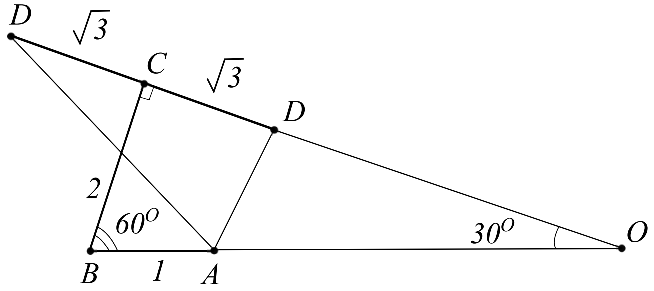
$$x+1=x-1$$

решений не имеет. Уравнение

$$x+1=-(x-1)$$

имеет решение $x=0$. Так как мы умножили уравнение на число 2, то посторонних корней не получили.
Ответ. 0.

3. На плоскости находятся четыре точки A, B, C, D. Известно, что $AB=1$, $BC=2$, $CD=\sqrt{3}$, $\angle ABC=60^\circ$, $\angle BCD=90^\circ$. Найдите AD.
   Решение. Построим рисунок. Пусть прямая CD пересекает прямую AB в точке O

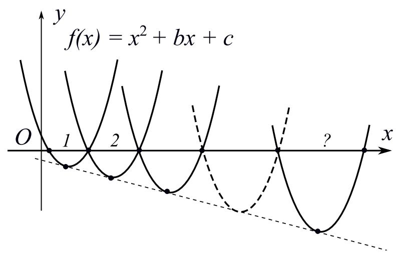


(по условию, эти прямые не параллельны). Возможно два положения точки D на

прямой CD – на отезке CO и вне этого отрезка. Треугольник BOC прямоугольный, угол при вершине O равен $30°$. Находим $AB = 4$, $OA = 3$, $OC = 2\sqrt{3}$. Для OD, с учетом $CD = \sqrt{3}$, получаем два возможных значения, $OD = \sqrt{3}$ или $OD = 3\sqrt{3}$. В треугольнике AOD известны две стороны и угол при вершине O. Воспользовавшись теоремой косинусов, найдем AD. Получаем два значения: $AD = 3$ или $AD = \sqrt{3}$.
Ответ. 3 и $\sqrt{3}$.

4. Сумма нескольких натуральных чисел равна 972. Чему равно наибольшее возможное значение их произведения?
Решение. Рассмотрим, на какие слагаемые необходимо разбить 972, чтобы получилось наибольшее возможное произведение. Среди слагаемых не должно быть единиц – в случае, если есть единица, мы можем добавить ее к любому из других слагаемых, и произведение увеличится. Любое слагаемое, большее 4, можно разбить на двойки и тройки. Т.е. если есть слагаемое p, то мы можем вычесть из него 2 или 3, и добавить эту двойку или тройку к набору. Произведение увеличится, т.к. $2 \cdot (p-2) > p, 3 \cdot (p-3) > p$. Возможное слагаемое 4 также можно заменить на две двойки. Итак, для достижения наибольшео возможного произведения числами, дающими в сумме 972, должны быть только 2 и 3. Далее, любые три двойки заменяются на две тройки, $2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$. Поэтому двоек в наборе может быть только одна, две, или не быть совсем. Но если двоек одна или две, а остальные слагаемые – тройки, то вся сумма не будет делиться на 3. Данное нам число делится на 3. Значит, для достижения наибольшего возможного произведения это число должно быть представлено суммой троек. $972 : 3 = 324$.
Ответ. 3^{324}.

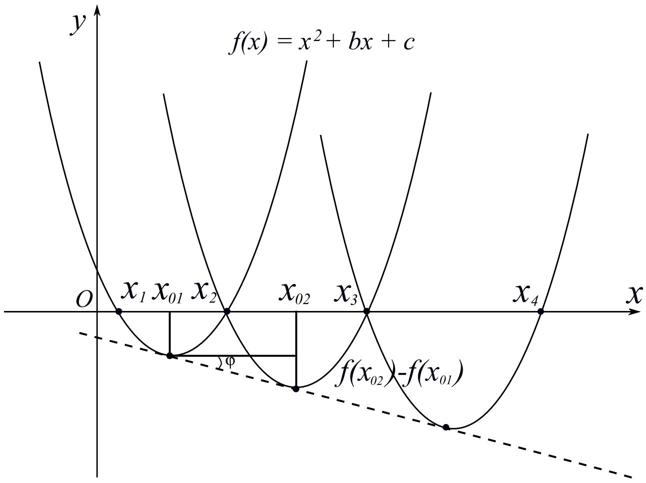
5. Параболы на рисунке получены сдвигом параболы $f(x) = x^2$ и размещены так, что точки их пересечения с осью OX соответственно попарно совпадают, а все вершины лежат на одной прямой. Всего парабол 2020. Длина отрезка оси OX, заключенного между корнями первой параболы, равна 1; длина отрезка, заключенного между корнями второй параболы, равна 2. Найдите длину отрезка оси OX, заключенного между корнями последней параболы.



Решение. Заметим, что расположение парабол может быть измнено сдвигом всего набора влево или вправо, (длины отрезков оси OX, заключенных между корнями парабол, при сдвиге не изменятся). Точка пересечения прямой, проведенной через вершины парабол, нам не потребуется. Длины отрезков задаются углом наклона проведенной прямой.
Напомним выражение для расстояния между корнями параболы. Пусть x_1 и x_2 – корни трехчлена $x^2 + bx + c$. Тогда

$$|x_2 - x_1| = \frac{-b+\sqrt{D}}{2} - \frac{-b-\sqrt{D}}{2} = \sqrt{D}$$

Здесь D – дискриминант этого трехчлена.



Пусть $x_0 = -\dfrac{b}{2}$ – абсцисса вершины параболы $f(x) = x^2 + bx + c$. Значение трехчлена в этой точке равно

$$f(x_0) = x_0^2 + bx_0 + c = \frac{b^2}{4} - b \cdot \frac{b}{2} + c = -\frac{D}{4} = -\frac{(x_2 - x_1)^2}{4}$$

В нашей задаче необходимо вычислить тангенс угла наклона проведенной прямой (угла между положительным направлением оси OX и прямой). Обозначим этот угол φ. Пусть x_{01} и x_{02} – абсциссы вершин первой и второй парабол, x_1, x_2, x_3 – их корни в порядке возрастания (см. рисунок).

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x_{02}) - f(x_{01})}{x_{02} - x_{01}}$$

У нас

$$x_{02} - x_{01} = x_{02} - x_2 + x_2 - x_{01} = \frac{1}{2}((x_3 - x_2) + (x_2 - x_1)) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2}$$

$$f(x_{02}) - f(x_{01}) = -1 - (-\frac{1}{4}) = -\frac{3}{4}$$

Получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Теперь найдем, как связаны длины отрезка оси OX между корнями парабол с номерами $n+1$ и n, выразив эту длины через корни x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, значения в вершинах $f(x_{0n})$ и $f(x_{0n+1})$, дискриминанты D_n и D_{n+1}, найденный тангенс. Используем, что расстояние между абсциссами вершин равно сумме половин расстояний между корнями соседних парабол.

$$x_{0n+1} - x_{0n} = x_{0n+1} - x_{n+1} + x_{n+1} - x_{0n} = \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{2} + \frac{x_{n+1} - x_n}{2} = \frac{\sqrt{D_{n+1}}}{2} + \frac{\sqrt{D_n}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{2} = \frac{f(x_{0n+1}) - f(x_{0n})}{x_{0n+1} - x_{0n}} = \frac{-\dfrac{D_{n+1}}{4} + \dfrac{D_n}{4}}{\dfrac{\sqrt{D_{n+1}}}{2} + \dfrac{\sqrt{D_n}}{2}} =$$

$$= \frac{D_n - D_{n+1}}{2(\sqrt{D_{n+1}} + \sqrt{D_n})}$$

Из этого уравнения

$$\sqrt{D_{n+1}} - \sqrt{D_n} = 1$$

Отсюда

$$\sqrt{D_{n+1}} = \sqrt{D_n} + 1$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = (x_{n+1} - x_n) + 1$$

Т.е. длина отрезка между корнями каждой следующей параболы увеличивается на 1. Отсюда получаем, что длина отрезка оси OX, заключенного между корнями параболы с номером 2020, равна 2020.
Ответ. 2020.