Ленинградская область

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

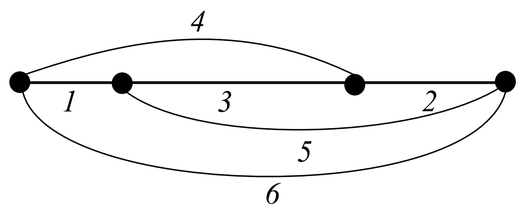
***Муниципальный этап***

**2019-2020 уч.год**

8 класс

Решения и ответы

1. Могут ли четыре корабля так расположиться на море, чтобы попарные расстояния между ними были бы равны соответственно 1, 2, 3, 4, 5, 6 милям?
*Решение.*
Достаточно привести рисунок или описание расположения. Корабли размещаются на одной прямой.




*Ответ.* Да, могут.

2. Решите уравнение НОК$(n^2, m)$+НОК$(n, m^2) = 2019$, где $n$ и $m$ – натуральные числа.
*Решение.*
*Первый способ.* Каждое из слагаемых делится на $n$ и на $m$, поэтому сумма делится и на $n$, и на $m$. Далее, правая часть, т.е. 2019, должно делиться и на $n$, и на $m$. Но $2019 = 3 \cdot 673$, поэтому возможные значения $n$ и $m$ – это 1, 3, 673. Проверкой убеждаемся, что если хотя бы одно число равно 673, то его квадрат слишком большой для правой части, а если эти числа равны 1 или 3 в любых комбинациях, то квадрат этих чисел слишком мал для правой части 2019.
*Второй способ.* Представим числа $n$ и $m$ в виде $n = p \cdot q$, $m = p \cdot r$, где $p$ – произведение всех общих простых множителей чисел $n$ и $m$, $q$ – произведение простых множителей $n$, не входящих в $m$, $r$ – произведение простых множителей $m$, не входящих в $n$ (варианты $p = 1$ или $q = 1$ или $r = 1$ тоже должны быть рассмотрены). Тогда НОК$(n^2, m) = p^2 \cdot q^2 \cdot r$, НОК$(n, m^2) = p^2 \cdot r^2 \cdot q$. Вынесем общие множители в сумме НОК$(n^2, m)$+НОК$(n, m^2) = p^2 \cdot q \cdot r \cdot (q + r)$. Заметим, что $2019 = 3 \cdot 673$, оба множителя простые. Из написанного выше разложения суммы НОК мы должны представить 2019 в виде произведения как минимум четырех множителей - квадрата простого числа, двух простых чисел и еще одного числа $(r + q)$. Так как в разложении 2019 на простые множители нет ни одного квадрата, то исходное уравнение не имеет решений при $p \neq 1$. Оно не имеет решений и при $p = 1, n \neq 1$, $m \neq 1$, так как произведение $q \cdot r \cdot (q + r)$ должно соответствовать произведению $2019 = 3 \cdot 673$. Если одно из чисел $n$ и $m$ было бы равно 1, (например, $n$), то уравнение свелось бы к $m + m^2 = 2019$, не имеющему решений в натуральных числах, что также можно проверить, используя разложение 2019 на простые множители. (Решение, содержащее $q = 1$ и/или $r = 1$ при $n \neq 1$, $m \neq 1$ попадает под случай $p \neq 1$ и также невозможно.)
*Ответ.* Решений нет.

3. Картофель и свеклу везут на 79 машинах, не обязательно одинаковых, причем каждая машина загружена или картофелем, или свеклой. Докажите, что из этих машин можно выбрать 40 машин так, что они везут не менее 50% всего картофеля и не менее 50% всей свеклы.
*Решение.*
Пусть картофель перевозится $n$ машинами. Расположим машины в порядке убывания массы перевозимого картофеля.

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_{n-1} \geq a_n$$

Пусть свекла перевозится $k$ машинами. Расположим машины в порядке убывания массы перевозимой свеклы.

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots \geq b_{k-1} \geq b_k$$

Одно из чисел $n$, $k$ четное, второе нечетное (их сумма равна 79). Пусть, для определенности, четным является $n$, т.е. $n = 2p, k = 2t-1$. Выберем $p$ первых (упорядоченных) машин, перевозящих картофель и $t$ машин, перевозящих свеклу. Очевидно,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_p \geq a_{p+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

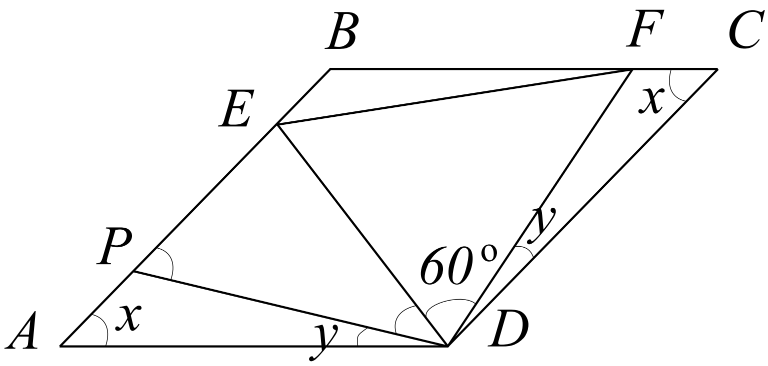
так как каждое слагаемое, стоящее на месте с номером $i$ слева, не меньше соответствующего слагаемого, стоящего на месте с номером $i$ справа. Все $p$ слагаемых слева в сумме дают не меньше половины всей массы картофеля. Действительно, если предположить, что сумма слева меньше $\frac{1}{2}M$ ($M$ - общая масса картофеля), и сумма справа не может превышать сумму слева, то сумма левой и правой части неравенства будет меньше $\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M = M$. Итак, мы показали, что выбранные первые $p$ машин перевозят не меньше половины массы картофеля.
Аалогично выберем $t$ первых (упорядоченных) машин, перевозящих свеклу

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_t \geq b_{t+1} + \ldots + b_{k-1} + b_k$$

Отметим, что число слагаемых слева на одно больше, чем справа, поэтому можно попарно сравнить слагаемые слева и справа (одно слагаемое слева окажется без пары), и получить, что сумма слева не меньше суммы справа. Выбранные первые $t$ машин перевозят не меньше половины массы свеклы.
Осталось оценить число машин. $79 = 2p + 2t - 1$, т.е. $2p + 2t = 80$, $p + t = 40$. Мы доказали, что выбрали 40 машин.

4. ABCD – ромб. Точки $E$ и $F$ лежат, соответственно, на сторонах $AB$ и $BC$ так, что $\frac{AE}{BE} = \frac{BF}{CF} = 5$. Треугольник $DEF$ – равносторонний. Найдите углы ромба.
*Решение.*

Обозначения показаны на рисунке. Ситуация, когда угол $D$ ромба острый, невозможна (см. далее). Отметим на стороне $AB$ точку $P$ так, что $AP = EB = FC$. Треугольники $CDF$ и $ADP$ равны, так как имеют равные углы $\angle A = \angle C$ и попарно равные стороны $AD = DC$, $AP = FC$. С учетом того, что треугольник $FED$ равносторонний по условию, получаем, что треугольник $EDP$ – равнобедренный ($ED = FD = PD$). (В этот момент заметим, что если угол ромба $\angle A$ тупой, то угол $\angle APD$ острый, и в равнобедренном треугольнике $EDP$ угол при основании тупой,




что невозможно). Отметим равные углы $x = \angle A = \angle C$ и $y = \angle ADP = \angle CDF$. Находим $\angle EPD = x + y$ (внешний угол треугольника $ADP$) и $\angle PDE = 180° - 2(x+y)$. Сложим все углы при вершине $D$ ромба ($\angle D = 180° - x$), получим уравнение

$$y + 180° - 2(x + y) + 60° + y = 180° - x$$

Отсюда $x = 60°$, углы ромба равны $60°$ и $120°$.
Окончание решения может быть другим. После того, как доказали, что треугольник $EDP$ равнобедренный, заметим, что равны его внешние углы: $\angle APD = \angle BED$. Отсюда треугольники $APD$ и $BED$ равны по двум указанным углам и сторонам ($AP = EB$, $PD = ED$). Отсюда $BD = AD$, и треугольник $ABD$ равносторонний. Значит, $\angle BAD = 60°$.
*Ответ.* Углы ромба равны $60°$ и $120°$.

5. Узлы бесконечной сетки (каждая ячейка предсталяет собой квадрат) раскрашены в три цвета, причем все три цвета использованы. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с катетами, не обязательно идущими по линиям сетки, все три вершины которого расположены в узлах сетки и раскрашены в разные цвета.
*Решение.*
Пронумеруем цвета узлов - первый, второй, третий.
Рассмотрим первый случай. Все горизонтальные прямые раскрашены каждая в свой цвет (на каждой горизонтальной прямой содержатся узлы только одного цвета). В таком случае берем произвольный узел первого цвета и проводим через него две взаимно перпендикулярные прямые по диагональным линиям сетки. Пересечение с двумя прямыми, окрашенными во второй и третий цвет, даст две вершины прямоугольного треугольника. (Каждая из двух диагональных прямых будет иметь хотя бы одно пересечение с горизонтальной прямой второго цвета и с горизонтальной прямой третьего цвета).
Рассмотрим второй случай. Найдется горизонтальная прямая $l$, содержащая узлы двух цветов (первого и второго). Берем на плоскости узел третьего цвета (он существует и не лежит на $l$). Проводим через него вертикальную прямую до пересечения с $l$. В пересечении получаем узел одного из двух цветов. Пусть этот узел имеет первый цвет. Найдем на прямой $l$ узел второго цвета и получаем прямоугольный треугольник с вершинами трех цветов (и горизонтальным и вертикальным катетами).
Рассмотрим третий случай. Существует горизонтальная прямая $m$, содержащая узлы всех трех цветов (и не существует горизонтальной прямой, узлы которой раскрашены в два цвета, иначе возвращаемся ко второму случаю). Выбираем на ней узел первого цвета (назовем его $A$) и проводим вертикаль через этот узел. Если

на вертикальной прямой найдется хотя бы одна точка второго цвета, искомый треугольник построен (узел второго цвета на вертикали, узел $A$ первого цвета на пересечении вертикали и горизонтали, узел третьего цвета существует и выбирается на прямой $m$). Показанный способ выбора трех вершин невозможен только при одном условии - любая вертикальная прямая содержит только узлы одного цвета. Но это соответствует первому рассмотренному случаю (только горизонтальное направление изменилось на вертикальное). Проведем такое построение еще раз. Проводим через узел $A$ две взаимно перпендикулярные прямые по диагональным линиям. Так как на прямой $m$ существуют узлы двух оставшихся цветов, то существуют две вертикальные прямые, все узлы которых имеют один определенный цвет, одна прямая второго цвета, и одна прямая третьего цвета. Каждая из двух проведенных диагональных прямых пересечет эти две вертикальные прямые в узлах. Получим один узел второго цвета и один узел третьего цвета на перпендикулярных лучах (катетах), выходящих из вершины первого цвета.
Итак, для любого возможного случая раскраски всех горизонтальных прямых мы показали существование прямоугольного треугольника с раскраской вершин в три цвета.

Ленинградская область

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

***Муниципальный этап***

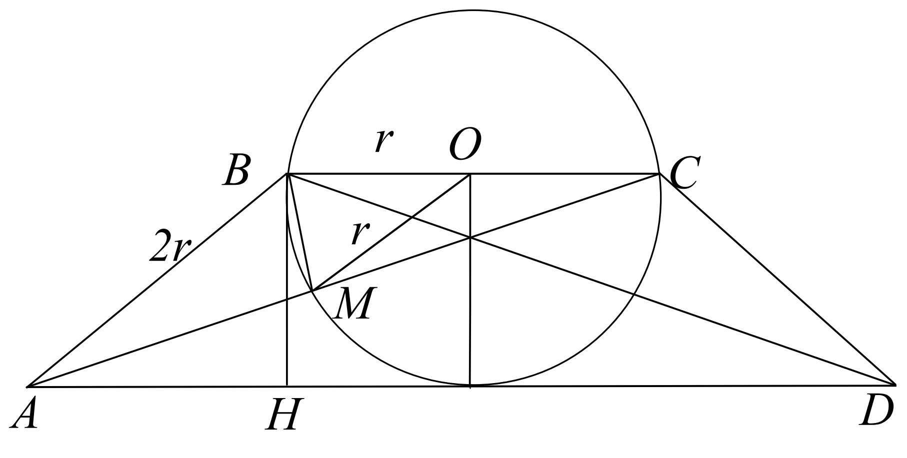
**2019-2020 уч.год**

9 класс

Решения и ответы

1. Большая карусель представляет собой фигурки сказочных зверей, движущихся по кругу друг за другом, на которых можно кататься. По десять учеников 6а, 6б, 6в классов и по пять учеников 7а и 7б классов разместились на карусели, заняв все места. Оказалось, что никакие два шестиклассника из разных классов не сидят друг за другом подряд. Докажите, что найдутся три шестиклассника из одного класса, разместившиеся на карусели друг за другом.
*Решение.*
Вначале заметим, что если нашлось четыре и более шестиклассника из одного класса, сидящих друг за другом, то, тем самым, нашлось три таких шестиклассника.
Пусть не нашлось ни одной указанной тройки шестиклассников. Это значит, что все шестиклассники из одного класса сидят по одному и по два подряд. По условию задачи, такие единичные или парные шестиклассники разделены семиклассником (иначе два шестиклассника из разных классов сидели бы друг за другом). Наименьшее количество разделителей-семиклассников потребуется, если все шестиклассники сидят последовательно попарно. Всего пар будет пятнадцать (по пять на класс), и на круговой карусели потребуется пятнадцать разделителей. Но у нас всего десять семиклассников, поэтому мы получаем противоречие с предположительной рассадкой, и существует хотя бы одна тройка шестиклассников одного класса, разместившихся друг за другом.

2. $ABCD$ – трапеция с основаниями $AD$ и $BC$, такая, что можно построить окружность с диаметром $BC$, проходящую через середины диагоналей $AC$ и $BD$, и касающуюся $AD$. Найдите углы трапеции.
*Решение.*




*Первый способ.* Пусть точка $M$ – середина диагонали $AC$, точка $O$ – центр окружности и середина основания $BC$. В треугольнике $ABC$ отрезок $MO$ – средняя линия, т.е. он параллелен боковой стороне $AB$ трапеции и равен половине этой стороны. Так как длина $MO$ равна радиусу $r$ окружности (точка $M$ по условию лежит на

окружности), то $AB = 2r$. Опустим высоту $BH$ из точки $B$. Катет $BH$ вдвое короче гипотенузы $AB$, следовательно, угол $BAD$ равен $30°$. Тогда угол $ABC$ равен $150°$. Аналогичные рассуждения про середину диагонали $BD$ приводят к результату $\angle ADC = 30°, \angle DCB = 150°$.
*Второй способ.* Заметим, что треугольник $BMC$ прямоугольный, так как его вершина лежит на окружности, а основание – диаметр. Поэтому $BM$ – высота в треугольнике $ABC$, а, так как по условию этот отрезок является медианой, то треугольник $ABC$ равнобедренный. В прямоугольном треугольнике $ABH$ гипотенуза равна $2r$, и катет $BH$ равен $r$. Получаем, что угол $BAD$ равен $30°$. Тогда угол $ABC$ равен $150°$. Аналогичные рассуждения про середину диагонали $BD$ приводят к результату $\angle ADC = 30°, \angle DCB = 150°$.
*Ответ.* $30°, 150°, 150°, 30°$

3. Найдите все решения уравнения

$$n^6 + 3n^5 + 3n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = m^3$$

где $m, n$ – целые числа.
*Решение.*
Преобразуем левую часть уравнения

$$n^6 + 3n^5 + 3n^4 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = m^3$$

$$n^3(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = m^3$$

$$n^3(n+1)^3 + (n+1)^3 = m^3$$

$$(n^3+1)(n+1)^3 = m^3$$

Произведение целых чисел слева является кубом $m^3$, значит, каждое из этих чисел является кубом, или одно из них равно 0. В первом случае получаем, что два последовательных натуральных числа, $n^3$ и $n^3+1$, являются кубами. Но два последовательных числа являются кубами только в том случае, если это 0 и 1 или $-1$ и 0. Получаем варианты $n = -1$ или $n = 0$, проверяем подстановкой, вычисляем $m$ и составляем ответ. Во втором случае, когда один из множителей слева 0, снова возвращаемся к ответу $n = -1$, $m = 0$.
Приведем доказательство, что два последовательных куба – это только числа 0 и 1 или $-1$ и 0. (Считается известным фактом, в работе можно не доказывать).

$$\begin{cases} a = x^3, \\ b = y^3, \\ a - b = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} a = x^3, \\ b = y^3, \\ x^3 - y^3 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} a = x^3, \\ b = y^3, \\ (x-y)(x^2+xy+y^2) = 1. \end{cases}$$

С учетом того, что $x$, $y$ целые числа, последнее произведение является произведением $1 \cdot 1$ или $(-1) \cdot (-1)$, откуда получаем $x = 1$, $y = 0$ или $x = 0$, $y = -1$.
*Ответ.* $n = -1$, $m = 0$ или $n = 0$, $m = 1$.

4. Натуральное число $n$ таково, что число $n + 1$ делится на 8. Докажите, что сумма всех делителей числа $n$, включая 1 и само число, делится на 8.
*Решение.*
Заметим, что число $n$ дает остаток 7 при делении на 8. Пусть $n = ab$. Рассмотрим остатки от деления $a$ и $b$ на 8 и составим таблицу произведения остатков (другими

словами, рассмотрим таблицу произведений $ab$ по модулю 8).

| | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 6 | 0 | 2 | 4 | 6 |
| **3** | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 |
| **4** | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 |
| **5** | 0 | 5 | 2 | 7 | 4 | 1 | 6 | 3 |
| **6** | 0 | 6 | 4 | 2 | 0 | 6 | 4 | 2 |
| **7** | 0 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Изучаем таблицу и находим, что произведение, дающее в остатке 7, можно получить только в случаях $a = 8k + 1$, $b = 8l + 7$; $a = 8k + 3$, $b = 8l + 5$; $a = 8k + 5$, $b = 8l + 3$; $a = 8k + 7$, $b = 8l + 1$ ($k$, $l$ – натуральные). Поэтому те делители числа $n$, которые образуют пары, дают в сумме остаток при делении на 8, равный 0. Это же верно и в случае пары $a = 1$, $b = n$. Отсюда сумма всех делителей есть сумма всех пар делителей, а каждая пара дает сумму, делящуюся на 8.

5. Пусть $a$, $b$, $c$ – стороны треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^3}{c^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{3ab}{c^2} > 1$$

*Решение.*
Перепишем неравенство к равносильному виду

$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3$$

Из неравенства треугольника следует

$$a + b > c > 0$$

Обе части неравенства умножим на положительное число $(a^2 - ab + b^2)$ (оно равно 0 только при $a = b = 0$)

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) > c(a^2 - ab + b^2)$$

Прибавим к обеим частям неравенства $3abc$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc > c(a^2 - ab + b^2) + 3abc$$

Преобразуем

$$a^3 + b^3 + 3abc > c(a^2 - ab + b^2 + 3ab)$$
$$a^3 + b^3 + 3abc > c(a + b)^2$$

Учтем, что

$$c(a + b)^2 > c^3$$

Получаем

$$a^3 + b^3 + 3abc > c(a + b)^2 > c^3$$

Ленинградская область

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

***Муниципальный этап***

**2019-2020 уч.год**

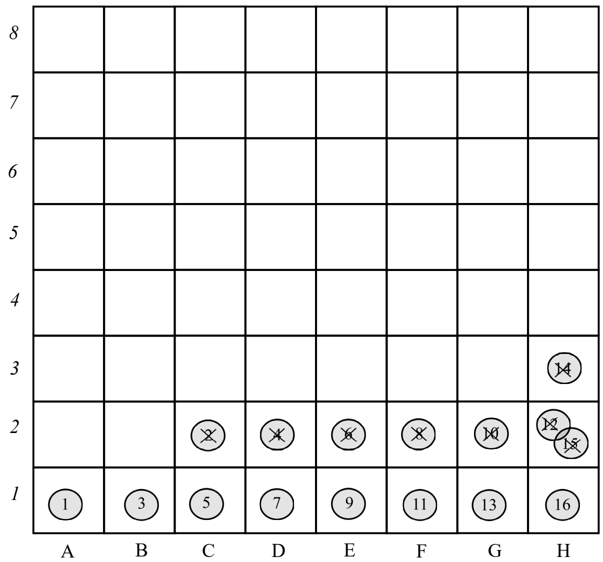
10 класс

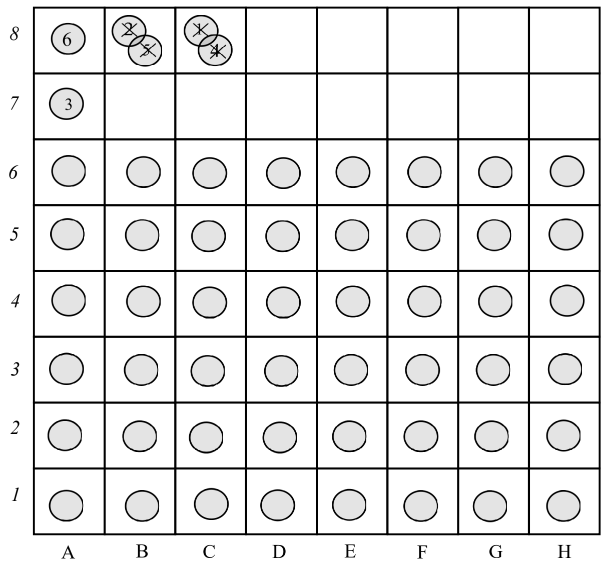
Решения и ответы

1. На шахматную доску $8 \times 8$ выкладывают фишки по следующему правилу. Первоначально доска пустая. Ход состоит в том, что на любое свободное поле ставится фишка. Этим же ходом ровно одна из фишек, оказавшихся с ней на соседнем поле, снимается с доски (если имеется такая соседняя фишка). Какое наибольшее количество фишек может расположиться на доске, с учетом указанного правила? Соседними полями считаются ближайшие по горизонтали, вертикали и диагонали.

   *Решение.*

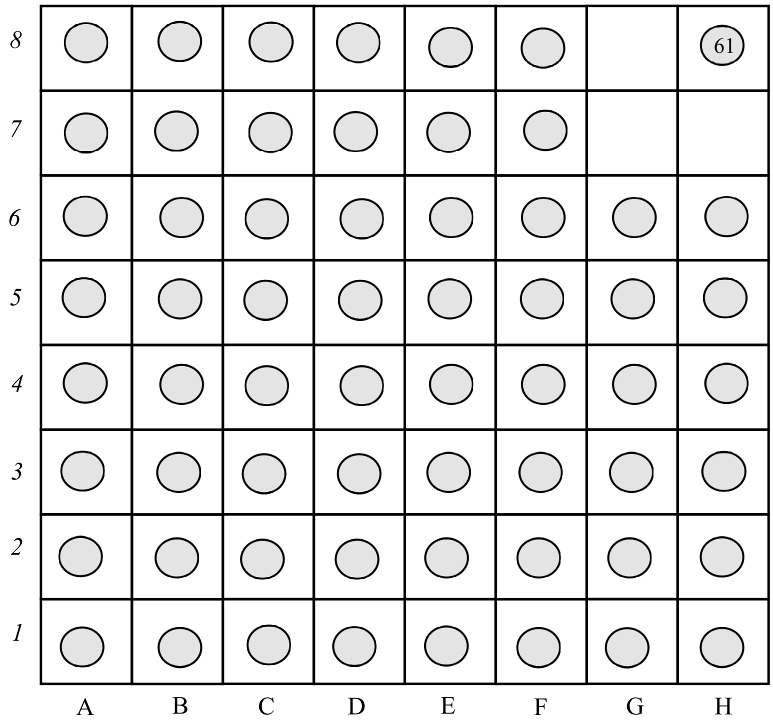
   Увеличить число фишек на доске на одну можно только тогда, когда новая фишка ставится на полностью свободное поле, т.е. на поле, все соседние поля которого свободны от фишек.





Выделим один горизонтальный ряд A1-H1, см. рис. Мы можем заполнить этот ряд фишками слева направо. Для этого будем расставлять фишки по очереди, как показано на рисунке. Номера в кружочках указывают последовательность выставления фишек. Перечеркнутый номер означает снятие фишки при выставлении соседней. При заполнении нижнего ряда каждая следующая фишка снимает с доски предыдущую, поэтому выставление фишки с нечетным номером в линию A1-H1 удаляет фишку с предыдущим четным номером из ряда A2-H2. Чтобы поставить фишку на поле H1, потребуется сначала поставить фишку номер 14 на поле H3, затем финку номер 15 на поле H2, сняв предыдущую. Остается поставить фишку номер 16 на угловое поле H1, сняв фишку номер 15 с доски.

Далее мы можем аналогичным способом заполнить все горизонтальные ряды до A6-H6. Ряды A7-F7 и A8-F8 придется заполнять иначе, так как сверху над ними недостаточно свободных полей. Порядок заполнения двух вертикальных клеток A7 и A8 показан на втором рисунке. Для их заполнения необходимо дважды начать с поля C8. Этим способом мы дойдем до полей F7 и F8. Дальше вправо продвинуться не получится, поскольку нет свободного поля, кроме поля H8. Мы можем поставить фишку на это поле, и, при желании заполнить поле G8, сняв фишку с поля H8. Итак мы показали, как можно заполнить доску 61 фишкой. Существуют другие последовательности расстановок и другие итоговые расстановки 61 фишки.




Остается доказать, что 62 фишки расставить невозможно. Пусть на доске расставлена 61 фишка. Три свободных поля не позволяют выделить из них одно, не имеющее занятых соседних полей. Минимальное число сторон свободного поля, к которым может примыкать другое свободное поле - две, в углу доски. Поэтому минимальное необходимое число свободных соседей - три, с учетом диагонального соседнего поля, см. рисунок.
*Ответ.* Можно расположить не более 61 фишки.

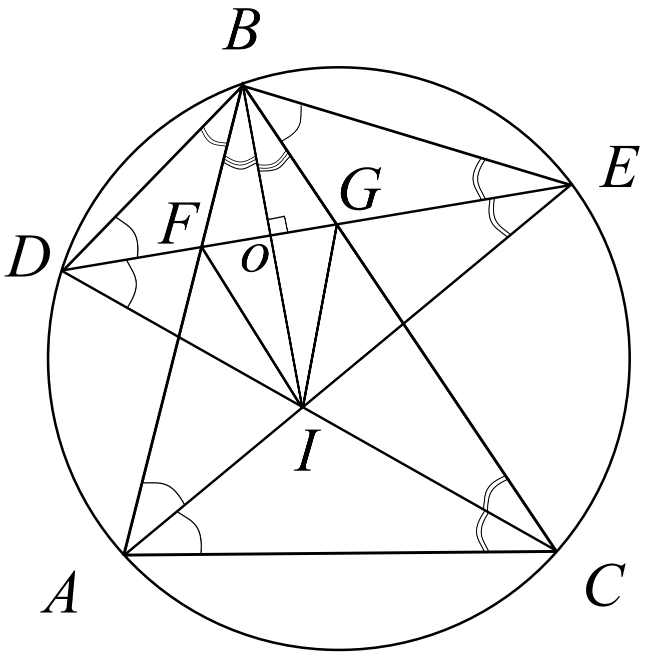
2. $f(x)$ и $g(x)$ – квадратные трехчлены, у каждого из которых старший коэффициент равен 1. Известно, что трехчлен $h(x) = f(x) + g(x)$ имеет два различных корня, и каждый из этих корней является также корнем уравнения $f(x) = g^3(x) + g^2(x)$. Докажите, что трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ равны.
*Решение.*
Пусть $x_1$ и $x_2$ – корни трехчлена $h(x)$. Это означает, что $f(x_1) = -g(x_1)$, $f(x_2) = -g(x_2)$. Отсюда получаем, что

$$g^3(x_1) + g^2(x_1) + g(x_1) = 0$$
$$g(x_1)(g^2(x_1) + g(x_1) + 1) = 0$$

Заметим, что ни при каких значенях $g(x_1)$ выражение $g^2(x_1)+g(x_1)+1$ не обратится в 0 (его можно рассмотреть как трехчлен с отрицательным дискриминантом). Поэтому произведение $g(x_1)(g^2(x_1)+g(x_1)+1)$ обращается в ноль только при $g(x_1) = 0$. Поэтому корень $x_1$ – корень трехчлена $h(x)$ – одновременно является корнем $g(x)$, и, следовательно, корнем $f(x)$. Аналогичные рассуждения верны в отношении корня $x_2$.

Итак, квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют по два корня, и их корни совпадают. Учитывая, что старшие коэффициенты равны 1, делаем вывод, что трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ совпадают. (Утверждение о совпадении трехчленов с двумя одинаковыми корнями и одинаковыми старшими коэффициентами считается известным из школьного курса, так как $f(x) = 1 \cdot (x - x_1)(x - x_2) = g(x)$.)

3. Биссектрисы углов $A$ и $C$ треугольника $ABC$ пересекают описанную вокруг него окружность в точках $E$ и $D$ соответственно. Отрезок $DE$ пересекает стороны $AB$ и $BC$ соответственно в точках $F$ и $G$. Пусть $I$ – точка пересечения биссектрис треугольника $ABC$. Докажите, что четырехугольник $BFIG$ – ромб.
*Решение.*




Дуги $BE$ и $EC$ равны, так как на них опираются равные углы $\angle BAE$ и $\angle EAC$. Поэтому равны углы $\angle BDE$ и $\angle EDC$. Получили, что $DE$ – биссектриса угла $\angle BDI$. Поэтому точки $B$ и $I$ лежат на лучах $DB$ и $DI$, симметричных друг другу относительно прямой $DE$. Аналогично, точки $B$ и $I$ лежат на лучах $EB$ и $EI$, симметричных друг другу относительно прямой $DE$. Поэтому точка $B$, как точка пересечения лучей $DB$ и $EB$, при отражении относительно прямой $DE$, переходит в точку пересечения образов этих лучей, т.е. в точку пересечения лучей $DI$ и $EI$, т.е. в точку $I$. Итак, точки $B$ и $I$ симметричны относительно прямой $DE$. Значит, угол $\angle BOE$ – прямой, и равны отрезки $BF = FI$, $BG = GI$.
Осталось заметить, что точки $F$ и $G$ симметричны относительно прямой $BI$, так как луч $BI$ является биссектрисой угла $FBG$, и отрезок $FG$ перпендикулярен биссектрисе (иными словами, треугольник $FBG$ – равнобедренный, так как биссектриса угла $\angle GBG$ является высотой). Поэтому все отрезки равны между собой: $BF = FI = BG = GI$.

4. В некоторой стране 47 городов. В каждом городе есть автовокзал, из которого ходят автобусы в другие города страны и, возможно, за границу. Путешественник изучил расписание и определил для каждого города число внутренних автобусных линий, выходящих из него. Оказалось, что если не рассматривать город Озерный, то для

кажого из остальных 46 городов число внутренних линий, выходящих из него, отличается от числа линий, выходящих из других городов. Найдите, со сколькими городами страны имеет прямое автобусное сообщение город Озерный.
*Число внутренних автобусных линий для данного города – это число городов своей страны, в которые можно доехать из данного города на прямом автобусе, без пересадок. Линии симметричны: если из города A можно доехать до города B, то и из города B можно доехать до города A.*
*Решение.*
Заметим, что внешние линиии не учитываются в этой задаче.
Всего существует 47 вариантов числа внутренних линий – от 0 до 46. Заметим, что существование города с 46 линиями исключает существование города с 0 линиями и наоборот.
Пусть имеется город с 46 линиями. Тогда наименьшее число линий, выходящих из одного города - одна, и все числа от 1 до 46 встречаются без пропусков (городов без учета города Озерный – 46). Город, из которого ходит один автобус, не может быть связан с городом Озерный, так как его единственная линия должна приводить в годод с 46 линиями (иначе тому не найдется 46-й пары). Мы организовали пару 1-46. Также рассмотрим город с 45 линиями. Поставим ему в соответствие город с двумя линиями. Заметим, что город с двумя линиями не может быть связан с Озерным. Рассуждая так же дальше, мы организуем пары 3-44, 4-43 и т.д, до пары 23-24. Город с меньшим числом линий в каждой паре не связан с городом Озерный. Заметим, что город Озерный не входит в эти пары, так как для существования большего числа линий в каждой паре необходима связь с городом Озерный. Итак, все города разбиты на пары, каждое число линий от 1 до 46 встречается ровно один раз. Поскольку в каждой паре ровно один город связан с Озерным, то город Озерный связан с 23 городами, по числу пар.
Пусть максимальное число линий - 45. Значит, имеется город с 0 линиями (из него автобусы ходят только за границу), и все числа от 0 до 45 встречаются без пропусков (городов без учета города Озерный – 46). Снова составим пары 0-45, 1-44 и т.д. до 22-23. Аналогично предыдущему случаю, в паре 0-45 первый город не связан с Озерным, а второй - связан (иначе из него не получить 45 линий). В паре 1-44 город с одной линией не связан с Озерным (его связь занята на линию в город с 44 линиями), а город с 44 линиями связан с Озерным, чтобы набрать нужное число линий. Далее, в паре 2-43 город с двумя линиями не связан с Озерным (его связь занята на линии в города с 44 и 43 линиями), а город с 43 линиями связан с Озерным, чтобы набрать нужное число линий. Получили 23 пары. Город Озерный связан ровно с одним городом в каждой паре, поэтому он связан с 23 городами.
*Ответ.* Озерный связан с 23 городами.

5. Найдите все такие натуральные числа $n \geq 2$, что $20^n + 19^n$ делится на $20^{n-2} + 19^{n-2}$.
*Решение.*
Рассмотрим выражение
$$20^n + 19^n - 19^2 \cdot (20^{n-2} + 19^{n-2})$$
По условию, оно делится на $20^{n-2} + 19^{n-2}$. С другой стороны,
$$20^n + 19^n - 19^2 \cdot (20^{n-2} + 19^{n-2}) = 20^{n-2}(20^2 - 19^2) = 20^{n-2} \cdot 39$$
Заметим, что $20^{n-2}$ и $20^{n-2} + 19^{n-2}$ взаимно просты, т.к. ни один простой делитель $20^{n-2}$ не является делителем $19^{n-2}$, и выражения $20^{n-2}$ и $20^{n-2} + 19^{n-2}$ не имеют

общих простых делителей. Поэтому в произведении $20^{n-2} \cdot 39$ только второй множитель может делиться на $20^{n-2} + 19^{n-2}$. При $n - 2 > 1$ выражение $20^{n-2} + 19^{n-2}$ превосходит 39, поэтому не может являться его делителем. Остается проверить подстановкой $n = 2, 3$.

При $n = 2$ $20^0 + 19^0 = 2$, нечетное число $20^2 + 19^2 = 761$ не делится на 2. При $n = 3$ $20^1 + 19^1 = 39$, $20^3 + 19^3 = 39 \cdot (20^2 - 20 \cdot 19 + 19^2)$ делится на $20^1 + 19^1 = 39$.

*Ответ.* $n = 3$.

Ленинградская область

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

***Муниципальный этап***

**2019-2020 уч.год**

11 класс

Решения и ответы

1. Какова наибольшая длина арифметической прогрессии из натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с разностью 2, в которой при всех $k = 1, 2 \ldots, n$ все числа $a_k^2 + 1$ являются простыми?
*Решение.*
Все члены прогрессии должны быть четными числами. Рассмотрим остатки от деления на 5. Поскольку разность арифметической прогрессии равна 2, то в прогрессии будут встречаться все остатки от деления на 5, в порядке
$\ldots 2, 4, 1, 3, 0, 2, 4, 1, 3, 0, \ldots$. Значит, среди членов прогрессии встретятся числа вида $a_k = 5t + 2$ и $a_k = 5t + 3$ ($t$ – натуральное). Для этих чисел вычисляем $a_k^2 + 1 = 25t^2 + 20t + 5$ и $a_k^2 + 1 = 25t^2 + 30t + 10$. Получили, что указанные члены прогрессии $a_k = 5t + 2$ и $a_k = 5t + 3$ дают выражения $a_k^2 + 1$, котрые делятся на 5 и не являются простыми. Максимально длинный набор членов арифметической прогрессии, не содержащий чисел вида $a_k = 5t + 2$ и $a_k = 5t + 3$, состоит из двух чисел. Поэтому нужных нам членов прогрессии, идущих подряд, может быть не более двух. Единственный случай, когда можно получить последовательность из трех чисел – включить в $a_k^2 + 1$ число 5. Действительно, числа $2, 4, 6$ образуют арифметическую прогрессию и дают соответствующую последовательность простых чисел $5, 17, 37$.
*Ответ.* $n = 3$.

2. Даны 2019 многочленов 2018-й степени, никакие два из которых не имеют общих корней. Известно, что каждый из этих многочленов имеет общий корень с суммой 2018 остальных. Докажите, что сумма этих 2019 многочленов равна нулю.
*Решение.*
Пусть $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $\ldots$, $P_{2019}(x)$ – данные многочлены, $H(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) + \ldots + P_{2019}(x)$ – их сумма. Отметим, что $H(x)$ – многочлен степени не выше 2018. Пусть $x_1$ – корень многочлена $P_1(x)$, этот корень не совпадает с корнями других многочленов $P_2(x)$, $P_3(x)$, $\ldots$, $P_{2019}(x)$. По условию, $x_1$ – корень многочлена $P_2(x) + P_3(x) + \ldots + P_{2019}(x)$, т.е.
$$P_1(x_1) + (P_2(x_1) + P_3(x_1) + \ldots + P_{2019}(x_1)) = 0$$
Значит, $H(x_1) = 0$. Аналогично видим, что $H(x_2) = 0$, $H(x_3) = 0, \ldots, H(x_{2019}) = 0$, где $x_2, x_3, \ldots, x_{2019}$ – корни соответствующих многочленов, и они не равны между собой.
Мы получили, что многочлен 2018-й степени (или меньшей) $H(x)$ обращается в ноль в 2019 различных точках, следовательно, этот многочлен тождественно равен 0.

3. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник, так, что все его вершины находятся в вершинах клеток, и ни одна из его сторон не идет по горизонтали или вертикали. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий сетки, заключенных внутри многоугольника, равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки, заключенных внутри многоугольника.
*Решение.*

Докажем, что площадь многоугольника равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки, заключенных внутри многоугольника. Пусть длины соотвествующих горизонтальных отрезков равны $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_{n-1}$, $a_n$. Многоугольник разбивается горизонтальными отрезками сетки на два треугольника и на $n-1$ трапецию. Высота каждой такой фигуры равна 1 (стороне клетки). Площади треугольников $S_0 = \dfrac{a_1}{2}$ и $S_n = \dfrac{a_n}{2}$. Площадь одной трапеции равна $S_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Площадь всего многоугольника

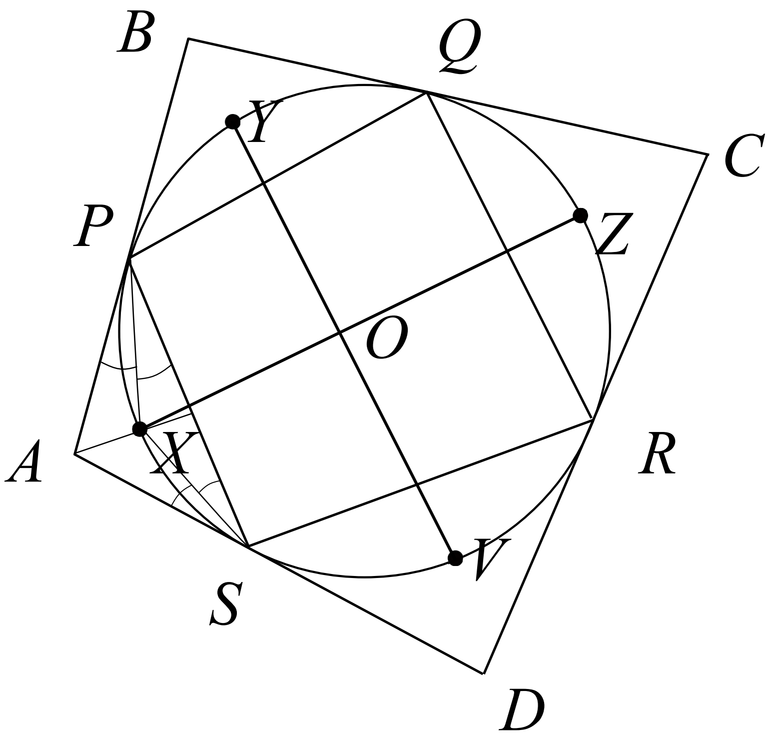
$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_i + \ldots + S_{n-1} + S_n =$$

$$= \frac{a_1}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 + a_3}{2} + \ldots + \frac{a_i + a_{i+1}}{2} + \frac{a_{i+1} + a_{i+2}}{2} \ldots + \frac{a_{n-1} + a_n}{2} + \frac{a_n}{2} =$$

$$= a_1 + a_2 + \ldots + a_i + \ldots + a_n$$

Аналогично, площадь многоугольника равна сумме длин вертикальных отрезков линий сетки. Это доказывается такими же рассуждениями про вертикальные отрезки. Значит, указанные в условии суммы равны между собой.

4. Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности $\omega$. $P$, $Q$, $R$, $S$ – точки касания этой окружности со сторонами $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ соответственно. В треугольники $APS$, $BPQ$, $CQR$, $DRS$ вписаны окружности. Центры этих окружностей обозначены $X$, $Y$, $Z$, $V$ соответственно. Докажите, что диагонали четырехугольника $XYZV$ взаимно перпендикулярны.
*Решение.*




Рассмотрим треугольник $APS$ и точку $X_1$ - середину дуги $PS$ окружности $\omega$ (на рисунке не показана, мы сейчас докажем, что она совпадет с точкой $X$). Докажем, что точка $X_1$ совпадает с точкой $X$. Заметим, что угол между хордой $X_1P$ и касательной $AP$ равен вписанному углу $\angle PSX_1$, опирающемуся на эту хорду. Так как $X_1$ – середина дуги $PS$, то угол $\angle PSX_1$ равен углу $\angle SPX_1$. Поэтому луч $PX_1$ – биссектриса угла $\angle APS$. Так же получаем, что луч $SX_1$ – биссектриса угла

$\angle ASP$. Поэтому точка $X_1$ – точка пересечения его биссектрис треугольника $APS$, значит, совпадает с точкой $X$. Аналогично, остальные центры вписанных окружностей $Y$, $Z$, $V$ лежат на серединах соответствующих дуг.

Пусть диагонали четырехугольника $XYZV$ пересекаются в точке $O$. Заметим, что сумма дуг $SP, PQ, QR, RS$ дает длину окружности, а сумма половинок этих дуг $PX, PY, RZ, RV$ дает половину длины оуружности. По известному факту, величина угла $\angle XOY$ равна полусумме дуг $XY$ и $ZV$, т.е. половине от половины угловой величины окружности, т.е $90°$.

5. Каждый зритель спектакля, купивший билет в первый ряд, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своем месте. Билетер может поменять местами двух соседей, если оба сидят не на своих местах. Сможет ли он рассадить всех зрителей первого ряда на свои места при любой указанной первоначальной рассадке?

   *Решение.*

   Занумеруем места в первом ряду слева направо от 1 до $n$, и занумеруем зрителей номерами их правильных мест (написанными на билетах). Будем двигать зрителя с номером $N$ вправо. Если нам удастся пересадить зрителя $N$ на свое место, то задача будет решена, так как тем же способом мы потом пересадим зрителя номер $N-1$ на свое место и т.д.

   Пересаживаем зрителя $N$ вправо, меняя его с соседом. Это можно сделать при условии, что на месте с номером $k+1$ не сидит зритель $K$ (где-то справа от начального положения $N$). Заметим, что такая неподходящая нам рассадка "ступенькой" может быть длиннее, чем в одно место. Покажем, как необходимо действовать в этом случае.

   Итак, пусть на месте с номером $k+1$ сидит зритель $K$, на месте с номером $k+2$ сидит зритель $K+1$ и так далее, до места с номером $k+j$, на котором сидит зритель $K+J-1$, при этом дальше "ступенька" не продолжается ($J$ – максимально возможное число для данного $K$). Рассмотрим два случая.

   Первый случай, $k+j<n$, т.е. "ступенька" не доходит до правого края ряда. В этом случае справа от "ступеньки" на месте $k+j+1$ сидит зритель $P$, номер которого не совпадает со зрителями, образуюшими "ступеньку" т.е. $P \neq K+J$, $P \neq K+J-1, \ldots P \neq K+1$. Поэтому зрителя $P$ можно переместить налево до тех пор, пока он не поменяется местами со зрителем $N$. После этого зрителя $N$ можно пересадить вправо до конца ступеньки, на место $k+j+1$. При этом все зрители $K, \ldots, K+J-1$ сначала сдвинутся на одно место вправо, а затем вернутся на свои места, а $N$ и $P$ поменяются местами. Итак, зрителя $N$ можно пересадить через "ступеньку".

   Второй случай, $k+j=n$, т.е. "ступенька" доходит до правого края ряда, и самым правым будет зритель $N-1$. В этом случае все зрители, начиная с номера $K$, рассаживаются на свои места, попарно меняясь местами, вплоть до зрителя $N$.

   Итак, действуя по указанному правилу, можно рассадить всех зрителей, начиная с номера $N$ и далее по убыванию.

   *Ответ.* Да, билетер сможет рассадить всех зрителей.