Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2019-2020 уч.год

8 класс

1. Могут ли четыре корабля так расположиться на море, чтобы попарные расстояния между ними были бы равны соответственно 1, 2, 3, 4, 5, 6 милям?

2. Решите уравнение НОК(n^2, m)+НОК$(n, m^2) = 2019$, где n и m – натуральные числа.

3. Картофель и свеклу везут на 79 машинах, не обязательно одинаковых, причем каждая машина загружена или картофелем, или свеклой. Докажите, что из этих машин можно выбрать 40 машин так, что они везут не менее 50% всего картофеля и не менее 50% всей свеклы.

4. ABCD – ромб. Точки E и F лежат, соответственно, на сторонах AB и BC так, что $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{BF}{CF} = 5$. Треугольник DEF – равносторонний. Найдите углы ромба.

5. Узлы бесконечной сетки (каждая ячейка предсталяет собой квадрат) раскрашены в три цвета, причем все три цвета использованы. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с катетами, не обязательно идущими по линиям сетки, все три вершины которого расположены в узлах сетки и раскрашены в разные цвета.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2019-2020 уч.год

9 класс

1. Большая карусель представляет собой фигурки сказочных зверей, движущихся по кругу друг за другом, на которых можно кататься. По десять учеников 6а, 6б, 6в классов и по пять учеников 7а и 7б классов разместились на карусели, заняв все места. Оказалось, что никакие два шестиклассника из разных классов не сидят друг за другом подряд. Докажите, что найдутся три шестиклассника из одного класса, разместившиеся на карусели друг за другом.

2. $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC, такая, что можно построить окружность с диаметром BC, проходящую через середины диагоналей AC и BD, и касающуюся AD. Найдите углы трапеции.

3. Найдите все решения уравнения
$$n^6 + 3n^5 + 3n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = m^3$$
где m, n – целые числа.

4. Натуральное число n таково, что число $n + 1$ делится на 8. Докажите, что сумма всех делителей числа n, включая 1 и само число, делится на 8.

5. Пусть a, b, c – стороны треугольника. Докажите неравенство
$$\frac{a^3}{c^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{3ab}{c^2} > 1$$

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2019-2020 уч.год

10 класс

1. На шахматную доску 8×8 выкладывают фишки по следующему правилу. Первоначально доска пустая. Ход состоит в том, что на любое свободное поле ставится фишка. Этим же ходом ровно одна из фишек, оказавшихся с ней на соседнем поле, снимается с доски (если имеется такая соседняя фишка). Какое наибольшее количество фишек может расположиться на доске, с учетом указанного правила? Соседними полями считаются ближайшие по горизонтали, вертикали и диагонали.

2. $f(x)$ и $g(x)$ – квадратные трехчлены, у каждого из которых старший коэффициент равен 1. Известно, что трехчлен $h(x) = f(x) + g(x)$ имеет два различных корня, и каждый из этих корней является также корнем уравнения $f(x) = g^3(x) + g^2(x)$. Докажите, что трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ равны.

3. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную вокруг него окружность в точках E и D соответственно. Отрезок DE пересекает стороны AB и BC соответственно в точках F и G. Пусть I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что четырехугольник $BFIG$ – ромб.

4. В некоторой стране 47 городов. В каждом городе есть автовокзал, из которого ходят автобусы в другие города страны и, возможно, за границу. Путешественник изучил расписание и определил для каждого города число внутренних автобусных линий, выходящих из него. Оказалось, что если не рассматривать город Озерный, то для кажого из остальных 46 городов число внутренних линий, выходящих из него, отличается от числа линий, выходящих из других городов. Найдите, со сколькими городами страны имеет прямое автобусное сообщение город Озерный.
   Число внутренних автобусных линий для данного города – это число городов своей страны, в которые можно доехать из данного города на прямом автобусе, без пересадок. Линии симметричны: если из города А можно доехать до города В, то и из города В можно доехать до города А.

5. Найдите все такие натуральные числа $n \geq 2$, что $20^n + 19^n$ делится на $20^{n-2} + 19^{n-2}$.

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2019-2020 уч.год

11 класс

1. Какова наибольшая длина арифметической прогрессии из натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n с разностью 2, в которой при всех $k = 1$, $2 \ldots, n$ все числа $a_k^2 + 1$ являются простыми?

2. Даны 2019 многочленов 2018-й степени, никакие два из которых не имеют общих корней. Известно, что каждый из этих многочленов имеет общий корень с суммой 2018 остальных. Докажите, что сумма этих 2019 многочленов равна нулю.

3. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник, так, что все его вершины находятся в вершинах клеток, и ни одна из его сторон не идет по горизонтали или вертикали. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий сетки, заключенных внутри многоугольника, равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки, заключенных внутри многоугольника.

4. Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности ω. P, Q, R, S – точки касания этой окружности со сторонами AB, BC, CD, DA соответственно. В треугольники APS, BPQ, CQR, DRS вписаны окружности. Центры этих окружностей обозначены X, Y, Z, V соответственно. Докажите, что диагонали четырехугольника $XYZV$ взаимно перпендикулярны.

5. Каждый зритель спектакля, купивший билет в первый ряд, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своем месте. Билетер может поменять местами двух соседей, если оба сидят не на своих местах. Сможет ли он рассадить всех зрителей первого ряда на свои места при любой указанной первоначальной рассадке?