Ленинградская область

Региональный турнир по математике

Заочный тур

28 октября - 10 декабря 2019 г.

1. *Неравенства*

   (a) Докажите, что при всех вещественных положительных значениях a, b, c выполняется
   $$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \leq \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}$$

   (b) Докажите, что при всех вещественных положительных значениях a, b, c выполняется
   $$\frac{2a^2}{b+c}+\frac{2b^2}{c+a}+\frac{2c^2}{a+b} \geq a+b+c$$

   (c) Предложите свое обобщение задачи.

2. *Точки на описанных окружностях*

   (a) В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD выполняется $AD < CD$. Трапеция вписана в окружность, и хорда DP окружности параллельна диагонали AC. Пусть касательная к окружности, проведенная в точке D, пересекает прямую AB в точке E, и прямые PB и DC пересекаются в точке Q. Докажите, что $EQ{=}AC$.

   (b) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE углов $\angle A$ и $\angle B$ соответственно, причем точка D лежит на стороне BC и точка E лежит на стороне AC. Точки F и G выбираются на описанной окружности треугольника ABC так, что прямые AF и DE параллельны, и прямые FG и BC параллельны. Докажите, что
   $$\frac{AG}{BG}=\frac{AB+AC}{AB+BC}$$

   (c) Предложите свое обобщение задачи.

3. *Периодические функции*

   (a) Функция $f(n)$ определена при всех натуральных n и принимает вещественные значения. При некотором натуральном t для всех натуральных n выполняются соотношения
   $$f(t)=f(2019),\ f(t+1)=f(2020),\ f(t+2)=f(2021),\ f(n+t)=\frac{f(n)-1}{f(n)+1}$$
   Докажите, что $f(n+4t)=f(n)$ для всех натуральных n и найдите наименьшее возможное натуральное значение t, при котором такая функция может существовать.

(b) Функция $F(x)$ определена при всех вещественных x, принимает вещественные значения и является ограниченной. При всех значениях аргумента x выполняется соотношение

$$F\left(x+\frac{1}{3}\right)+F\left(x+\frac{1}{2}\right)=F(x)+F\left(x+\frac{5}{6}\right)$$

Докажите, что $F(x)$ является периодической.

(c) Предложите свое обобщение задачи.

4. *Последние цифры числа*

(a) Положительное целое число n таково, что если удалить последние три цифры в его десятичной записи, то останется число $\sqrt[3]{n}$. Найдите n.

(b) Найдите две последние цифры в десятичной записи числа

$$2^5+2^{5^2}+2^{5^3}+\ldots+2^{5^{2019}}$$

(c) Предложите свое обобщение задачи.

5. *Сумма цифр числа*

(a) Пусть $S(m)$ – сумма цифр натурального числа m в его десятичной записи. Приведите пример числа n такого, что $S(k\cdot n)$ является четной для всех натуральных k, $1\le k\le 2018$, а $S(2019\cdot n)$ нечетна.

(b) Докажите, что не существует целого положительного числа n такого, что $S(k\cdot n)$ является четной для всех натуральных k.

(c) Предложите свое обобщение задачи.

6. *Общие делители*

В задаче k, n, p – натуральные числа и $n>1$.

(a) Докажите, что число $k^{25}-k$ делится на 3 при всех k.

(b) Найдите количество чисел n, $(n>1)$ таких, что число $k^{25}-k$ делится на n при всех k.

(c) Существуют ли какие-нибудь иные значения p, $(p>25)$, при которых существуют числа n, $(n>3)$ такие, что число k^p-k делится на n при всех k? Можно ли указать количество чисел n при найденных значениях p, если они существуют?

(d) Предложите свое обобщение задачи.

- *Решения задач необходимо написать на бумаге, сканировать и отправить не позднее 10 декабря 2019 г на e-mail* konfint@yandex.ru

- *Вопросы по условиям задач можно задать по электронной почте по указанному выше адресу.*

- *Не предполагается, что все команды-участники турнира решат все задачи, тем не менее, чем больше задач выполнено, тем выше рейтинг команды. Имеет смысл отправить все решения, в которых имеется хотя бы частичное продвижение.*

- *Предложенные задачи требуют внимательного анализа условия, в этом смысле они рассматриваются как исследовательские. Для выполнения последнего пункта каждого задания необходимо рассмотреть еще какой-нибудь случай или предложить обобщающую формулировку, желательно, с последующим доказательством. Наличие обобщения задачи усиливает результат.*