Комитет общего и профессионального образования Ленинградской области
Государственное бюджетное учреждение дополнительного образования
«Ленинградский областной центр развития творчества одаренных детей и юношества «Интеллект»

Программа рассмотрена и принята
на методическом совете
ГБУ ДО «Центр «Интеллект»
Протокол № 1 от 14.01.2019 г.

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор ГБУ ДО
«Центр «Интеллект»
____________Д.И. Рочев
Приказ № 07/1 от 17.01.2019 г.

Дополнительная общеобразовательная программа
«Математические идеи и методы»
(естественно-научная направленность)

Возраст обучающихся: 16-17 лет

Срок реализации: 1
календарный год
(144 аудиторных часа)

Автор программы:
Головачев Григорий Михайлович,
кандидат физико-математических
наук, преподаватель высшей
категории

п. Лисий Нос
2019 г.

Пояснительная записка

Направление

Естественнонаучное

Название программы

«Математические идеи и методы»

Автор программы

Головачев Григорий Михайлович

Место работы: Санкт-Петербургский государственный университет

Должность: преподаватель

Кандидат физико-математических наук, преподаватель высшей категории.

Целевая аудитория

На обучение по программе принимаются школьники 16-17 лет, проявившие активный интерес к занятиям математикой, продемонстрировавшие высокий результат в предварительном отборочном соревновании, и (или) добившиеся заметных результатов в математических олимпиадах или конкурсах регионального или всероссийского уровня, проходившие ранее обучение по программам дополнительного математического образования углубленного уровня.

Необходимым условием участия в программе является наличие мотивации к самостоятельному решению задач повышенного уровня сложности.

В качестве предварительного отборочного соревнования проводится заочная олимпиада по математике.

Задания олимпиады состоят из 7 задач, на выполнение которых отводится 3 часа. Задачи имеют характер традиционных олимпиадных и исследовательских, требующих применения широко известных методов и не выходящих за рамки общеобразовательной программы. Задания олимпиады оцениваются максимально в 70 баллов.

Дополнительно участники отборочного соревнования получают: победители муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников (Ленинградской области) - 10 баллов, призеры регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников (Ленинградской области) - 15 баллов, победители регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников (Ленинградской области) – 20 баллов, участники заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников – 30 баллов, призеры олимпиад I и II уровня РСОШ – 15 баллов, победители олимпиад I и II уровня РСОШ – 20 баллов, победители и призеры олимпиад III уровня РСОШ – 15 баллов, победители и призеры математических конкурсов и иных олимпиад – 10 баллов.

Список обучающихся, рекомендованных к зачислению на программу, составляется по рейтингу по убыванию результатов (исходя из 100 балльной системы оценивания). Минимальный уровень, необходимый для зачисления на программу, составляет 30 баллов.

Аннотация программы

Программа нацелена на подготовку к участию в олимпиадах и конкурсах, в том числе к вузовским олимпиадам. Обучение проводят преподаватели Санкт-Петербургского государственного университета. Рассчитана на учащихся 10 классов, которым необходимы углубление и систематизация имеющихся знаний. Значительная часть времени отводится тренингам по решению задач повышенной сложности.

Формы работы – самые разнообразные: элементы лекций, семинары, решение задач в команде, матбои, олимпиады, решение исследовательских задач.. Представлены все основные разделы, которые относятся к олимпиадной тематике старшеклассников и выпускников – применение метода математической индукции, инварианты, логические рассуждения, делимость, целые числа, применение элементов теории чисел в задачах, комбинаторика, вероятность, графы, многочлены, уравнения, системы линейных и нелинейных уравнений, задачи с параметрами, элементы матричного аппарата, решение задач с параметрами, в том числе с применением исследований множеств на координатной плоскости, вычислительные задачи планиметрии, вписанные и описанные окружности многоугольников, применение симметрий и движений, сечения в стереометрии, свойства многогранников, свойства и преобразования элементарных функций, свойства симметрии графиков, применение производной, касательные к графикам, первообразная.

Отличительная особенность программы – акцент на практическое применение теоретического материала, подготовка к конкурсам и олимпиадам. Обучение потребует достаточно много времени, значительный результат невозможен без желания самостоятельно решать большое количество задач и участвовать в проектах.

Цели и задачи программы

Цели:

1. Получение устойчивых навыков самостоятельного решения задач повышенного уровня сложности по математике.
2. Формирование специфического стиля мышления, позволяющего самостоятельно проводить законченные математические рассуждения.
3. Достижение высокого уровня владения навыками решения задач, позволяющего участвовать в олимпиадах по математике и в математических турнирах.

Задачи:

1. Познакомить участников программы с отдельными разделами элементарной математики, не входящих в общеобразовательные программы, и познакомить с примерами решения задач, относящихся к этим разделам.
2. Расширить умение самостоятельно анализировать многоэтапную задачу и конструировать правильную стратегию ее решения.
3. Выработать навыки свободного использования всех известных методов при решении одной задачи, не ограничивая себя отдельным разделом.
4. Научить участников программы эффективной самоорганизации при решении сложных задач, имеющих характер исследовательских.
5. Выработать навыки: работы в группе, индивидуальной работы в условиях ограниченного времени, создания устной и письменной презентации решения, публичного выступления, оппонирования, рецензирования, умения вести дискуссию.

Планируется, что каждый выпускник программы:

1. Расширит навыки решения задач повышенной сложности: анализа условия задачи, выделения необходимых этапов решения, сопоставления теоретических сведений, методов решения с условием задачи, выбора методов решения, проверки применимости

предложенных идей, проведения необходимых вычислений и доказательств, компоновки конечного результата, анализ ответа, проверки правильности решения.
2. Закрепит выработанные ранее умения формулировать решение задачи как в виде логически правильного и грамотного устного выступления, так и в виде письменного текста при изложении многоэтапной задачи.
3. Научится правильно распределять время и усилия при решении многоэтапной задачи, а также эффективной командной работе.
4. Получит опыт публичных выступлений с докладом, рецензией, критикой.
5. Освоит разделы элементарной математики повышенной сложности.
6. Повысит уровень подготовки к выступлениям на различных этапах Всероссийской олимпиады, других олимпиадах, к участию в математических турнирах.
7. Освоит прикладные методы математики и их применение в смежных дисциплинах, получит навыки междисциплинарных исследований.

Содержательная характеристика программы

Программа рассчитана на желающих продолжить свое развитие в математическом направлении и в перспективе получить профессиональное математическое образование прикладного или фундаментального характера. В частности, программа может рассматриваться как продолжение программы «Углубленная, олимпиадная и исследовательская математика». Для понимания принципов построения этих двух программ приведем пояснение, содержащееся в программе «Углубленная, олимпиадная и исследовательская математика».

Все содержание математической подготовки молодежи в возрасте 13-17 лет, как в Российской Федерации, так и в мире, можно разделить на четыре группы (частично пересекающиеся между собой).

1. Первая группа. Эта группа представляет собой основное содержание общеобразовательных программ основного общего образования и среднего общего образования. Знание теоретического материала и устойчивое владение методами решения задач необходимо и достаточно для успешной итоговой аттестации и выполнения 60-70% заданий ЕГЭ. На это содержание ориентированы традиционные общеобразовательные программы базового уровня.
2. Вторая группа. Она отражает углубленное содержание общеобразовательных программ основного общего образования и среднего общего образования. Теоретический материал этой группы почти не расширяет сведения, которые излагаются при подготовке по базовым программам. Отличие содержания углубленных программ от базовых состоит в значительном расширении рассматриваемых методов решения задач; основные усилия при обучении направлены на формирования умений свободно выбирать необходимый метод и правильно его применять. К этой группе следует отнести типы задач: логические задачи, задачи с целыми числами без применения теории чисел, задачи с параметрами, экстремальные задачи, отдельные типы геометрических задач, исследование разрешимости уравнений второй степени аналитическими методами и т.п. Это содержание математического обучения направлено на выработку навыков, необходимых для полной успешной сдачи ЕГЭ. Как правило, эта группа составляет содержание углубленной подготовки по общеобразовательным программам. Использование этих навыков чаще всего достаточно для успешного выступления в олимпиадах РСОШ.
3. Третья группа. Эту группу составляют теоретические сведения и методы, используемые при проведении Всероссийской олимпиады школьников. Теоретические сведения,

расширяющие обучение по отношению к первым двум группам: теория чисел, делимость и сравнения, комбинаторика, графы, некоторые теоремы планиметрии, математическая индукция, рекуррентные соотношения, цепные дроби, многочлены с целыми коэффициентами, раскраски и т.п. Значительно расширен список методов решения задач: инвариант, принцип крайнего, принцип Дирихле, перебор остатков, рассмотрение приведенных систем вычетов, решение с конца и т.п. К этому же следует отнести традиционные темы, связанные с расположением фигур на шахматной доске, выигрышные стратегии, заполнение таблиц. Особенностью подготовки в этом случае является нацеленность на быстрый поиск необходимой идеи решения задачи и доведение решения до законченного в условиях ограниченного времени на олимпиаде.

4. Четвертая группа. К этой группе относится содержание математических турниров, математических боев и т.д. Тематика этих задач может не отличаться от третьей группы, но предлагаемые задачи характеризуются большей сложностью, допускают множество вариантов и требуют исследования условия, применения нескольких идей и подробного анализа результатов. Такие задачи по общепринятой терминологии относятся скорее к исследовательским. Особенностью подготовки является выработка умений разделить задачи на этапы, поиск идей, построение и обоснование решения и подготовка к его публичному обсуждению. Решение задач такого типа занимает от нескольких дней до нескольких месяцев.

Содержание предыдущей программы «Углубленная, олимпиадная и исследовательская математика» и других аналогичных программ, рассчитанных на учащихся 8-10-х классов, соответствует второй и третьей группе. Отметим, что в 10-м классе у многих учащихся, занимающихся математикой, интерес переключается с олимпиадной тематики на другие задачи. Это связано с несколькими причинами. Во-первых, успешное выступление на региональном и заключительном этапах Всероссийской олимпиады школьников требует погружения в изучение узкой олимпиадной тематики. Ученики, проигрывающие олимпиадную конкуренцию, теряют уверенность в своих силах и переключаются на другие виды математической подготовки. Во-вторых, в возрасте 16-17 лет ученики больше задумываются о выборе профессии. Если они связывают свое будущее с профессиональным математическим образованием (фундаментальным или прикладным), то вместо олимпиадной тематики им становится интересно проведение исследований или овладение расширенным набором сложных методов.

Настоящая программа «Математические идеи и методы» направлена на удовлетворение потребностей обучающихся в углубленной математической подготовке профессиональной направленности. В основном она посвящена четвертой группе из приведенного выше перечня с значительным количеством задач третьей группы. Основной упор делается на выработку умений самостоятельной работы над сложными задачами. Важнее не то, какие разделы будут изучены, а каков уровень сложности задач, которые способен решить ученик.

Обучение построено в виде цикла разнообразных занятий-тренингов по решению задач (семинаров, матбоев, работой над проектом). В этом случае преподаватель передает самое важное – не только знания, но и навыки, опыт, владение методами. Содержанием программы может быть представлено не только в виде перечня тем, но и в виде списка воспроизводимых этапов решения сложных задач.

Теоретический материал программы разделен на двенадцать независимых друг от друга разделов. Каждый раздел отнесен к одной из трех частей (алгебра, математический анализ, геометрия) и излагается на одной из четырех очных сессий. Теоретическая часть занимает не более 20% всего сессионного времени.

Основное содержание программы представляет собой изложение методов решения задач преподавателями, демонстрация примеров применения и отработка навыков решения задач рассмотренными методами. Используется комплексность обучения: обучающиеся получают для решения или исследования задачи, которые требуют применения нескольких известных им идей и методов.

Основная часть времени посвящена активным образовательным технологиям: решению задач под руководством преподавателя в малых группах, совместному решению задач группой учащихся с последующей защитой решения, соревнованиям – олимпиадам или командным матбоям, выполнению исследований и их защите.

<u>Образовательные технологии</u>

№	Форма организации образовательного процесса	Соотношение численности детей и преподавателей
1.	Лекции (демонстрация теории и примеров решения задач преподавателем)	Поток до 40 чел одной параллели. Иногда возможно объединение двух параллелей на одну лекцию с общей темой. Три-четыре лекции по 1,5 часа в сессию.
2.	Тренинги по решению задач, устная защита решений (практическая работа)	Работа в группах над многоэтапными задачами, под руководством преподавателя, не более 20 человек в группе, 1 преподаватель на группу. 12 тренингов по 1,5 часа в сессию.
3.	Олимпиада (индивидуальное письменное соревнование)	Работа в группах, не более 15 человек в группе, 1 преподаватель на группу. 4 часа в сессию.
4.	Матбой (командное соревнование, решение задач группой учащихся и последующая защита работ путем публичного представления решений)	Максимально три команды по 5 человек, два-три преподавателя, проводящих один матбой. Один раз в сессию.
5.	Выполнение и защита исследовательской работы (индивидуальное выполнение заданий исследовательского характера, выполняемое под руководством преподавателя в течение сессии или в более длительный период, до года, завершающийся написанием текста и публичной защитой).	Один руководитель на одного-двух учащегося, четыре часа работы одного преподавателя во время сессии с одним-двумя учащимся одновременно, ориентировочно 8 часов работы преподавателей на одну группу 10 чел. во время сессии при условии, что половина обучающихся выполняет исследовательскую работу. Консультирование обучающихся между сессиями.
6.	Выполнение письменного домашнего задания (индивидуальный тренинг)	Индивидуальная работа по письменным заданиям. Один преподаватель на группу учащихся 15-30 человек, составляющий задание и проверяющий работы. Работа между сессиями.

Задания проектного и исследовательского характера, выполняемые в рамках программы

1. Проведение матбоя, решение задач исследовательского характера группой учащихся, и последующий доклад решений перед другими группами учащихся с взаимным оппонированием и рецензированием.
2. Выполнение индивидуальной исследовательской работы - решение задач, обязательно имеющих элементы научной новизны, в течение длительного времени под руководством преподавателя с целью получения значимых (нетривиальных) решений. Написание текста работы и публичная защита работы.

Пример задания матбоя:

Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 291000, и таких, что k^2-1 делится нацело на 291.

Пример исследовательской работы:

Даны положительные числа a, b, c, d.

a) Докажите, что если $cd=1$, то на отрезке с концами ab и $(a+c)(b+d)$ найдется по крайней мере один квадрат целого числа.

b) Сформулируйте (достаточное или необходимое) условие, которому должно удовлетворять число c, чтобы на указанном отрезке нашлось не меньше двух квадратов целых чисел.

c) Сформулируйте (достаточное или необходимое) условие, которому должно удовлетворять число c, чтобы на указанном отрезке нашлось не меньше n квадратов целых чисел.

Учебно-тематический план занятий

Содержание	Методы	Ресурсы	Трудоемкость	Способ контроля	Оценка
Первая сессия					
Модуль 1 Делимость. Сравнения. Вычеты. Теоретико-числовые функции.	Лекция, тренинги по практическому решению задач в группах	Распечатки методических материалов и заданий	10 аудиторных часов с преподавателем, 2 часа самостоятельно	Преподаватель, проводящий занятие	до 10 баллов
Модуль 2 Математический анализ. Квадратичные функции. Кубические функции.	Лекция, тренинги по практическому решению задач в группах	Распечатки методических материалов и заданий	10 аудиторных часов с преподавателем, 2 часа самостоятельно	Преподаватель, проводящий занятие	до 10 баллов
Модуль 3	Лекция, тренинги по	Распечатки методических	10 аудиторных часов с преподавателе	Преподаватель, проводящий занятие	до 10 баллов

Метрические теоремы планиметрии.	практическому решению задач в группах	материалов и заданий	м, 2 часа самостоятельно		
Олимпиада	Индивидуальное соревнование по решению задач	Распечатки заданий	Аудиторная работа – 2 часа Самостоятельная работа – нет	Жюри	до 15 баллов
Матбой	Командное соревнование по решению задач	Распечатки заданий	Аудиторная работа – 4 часа Самостоятельная работа – 6 часов	Жюри	до 20 баллов
Выполнение и защита исследовательской работы	Работа с научным руководителем	Методические материалы, книги	Аудиторная работа – 4 часа Самостоятельная работа – 6 часов	Контроль научного руководителя, итоговая конференция	до 20 баллов
Видеоконференция	Проблемная лекция для учащихся и слушателей видеоконференции	Методические материалы, книги	Аудиторная работа – 2 часа	Преподаватель, проводящий занятие	Не оценивается
Межсессионная работа	Выполнение домашнего задания и выполнение исследовательской работы	Материалы, в том числе передаваемые по электронной почте	Самостоятельная работа - 30 часов	Проверка выполненного письменного задания на сессии. .	до 15 баллов

Содержание	Методы	Ресурсы	Трудоемкость	Способ контроля	Оценка
		Вторая сессия			
Модуль 1 Многочлены. Кольцо многочленов над вещественным и над комплексным полем.	Лекция, тренинги по практическому решению задач в группах	Распечатки методических материалов и заданий	10 аудиторных часов с преподавателем, 2 часа самостоятельно	Преподаватель, проводящий занятие	до 10 баллов
Модуль 2 Математический анализ. Дифференциальное исчисление и его применение	Лекция, тренинги по практическому решению задач в группах	Распечатки методических материалов и заданий	10 аудиторных часов с преподавателем, 2 часа самостоятельно	Преподаватель, проводящий занятие	до 10 баллов
Модуль 3 Многогранники. Теоремы о правильногранных многогранниках	Лекция, тренинги по практическому решению задач в группах	Распечатки методических материалов и заданий	10 аудиторных часов с преподавателем, 2 часа самостоятельно	Преподаватель, проводящий занятие	до 10 баллов
Олимпиада	Индивидуальное соревнование	Распечатки заданий	Аудиторная работа – 2 часа Самостоятельная работа – нет	Жюри	до 15 баллов

	по решению задач				
Матбой	Командное соревнование по решению задач	Распечатки заданий	Аудиторная работа – 4 часа Самостоятельная работа – 6 часов	Жюри	до 20 баллов
Выполнение и защита исследовате-льской работы	Работа с научным руководителем	Методические материалы, книги	Аудиторная работа – 4 часа Самостоятельная работа – 6 часов	Контроль научного руководителя, итоговая конференция	до 20 баллов
Видеоконференция	Проблемная лекция для учащихся и слушателей видеоконференции	Методические материалы, книги	Аудиторная работа – 2 часа	Преподаватель, проводящий занятие	Не оценивается
Межсессионная работа	Выполнение домашнего задания и выполнение исследовательской работы	Материалы, в том числе передаваемые по электронной почте	Самостоятельная работа - 30 часов	Проверка выполненного письменного задания на сессии. .	до 15 баллов

Содержание	Методы	Ресурсы	Трудоемкость	Способ контроля	Оценка
		Третья сессия			
Модуль 1 Алгебраические структуры. Элементы теории групп. Кольца. Линейная алгебра. Системы уравнений.	Лекция, тренинги по практическо-му решению задач в группах	Распечатки методических материалов и заданий	10 аудиторных часов с преподавателем, 2 часа самостоятельно	Преподаватель, проводящий занятие	до 10 баллов
Модуль 2 Математи-ческий анализ. Аналитические методы решения задач. Функциональные уравнения.	Лекция, тренинги по практическому решению задач в группах	Распечатки методических материалов и заданий	10 аудиторных часов с преподавателем, 2 часа самостоятельно	Преподаватель, проводящий занятие	до 10 баллов
Модуль 3 Метрические задачи в евклидовом пространстве.	Лекция, тренинги по практическому решению задач в группах	Распечатки методических материалов и заданий	10 аудиторных часов с преподавателем, 2 часа самостоятельно	Преподаватель, проводящий занятие	до 10 баллов
Олимпиада	Индивидуа-льное соревнование по решению задач	Распечатки заданий	Аудиторная работа – 2 часа Самостоятельная работа – нет	Жюри	до 15 баллов
Матбой	Командное соревнование по решению задач	Распечатки заданий	Аудиторная работа – 4 часа Самостоятельная работа – 6 часов	Жюри	до 20 баллов

Выполнение и защита исследовате-льской работы	Работа с научным руководителем	Методические материалы, книги	Аудиторная работа – 4 часа Самостоятельная работа – 6 часов	Контроль научного руководителя, итоговая конференция	до 20 баллов
Видеоконференция	Проблемная лекция для учащихся и слушателей видеоконференции	Методические материалы, книги	Аудиторная работа – 2 часа	Преподаватель, проводящий занятие	Не оценивается
Межсессионная работа	Выполнение домашнего задания и выполнение исследовательской работы	Материалы, в том числе передаваемые по электронной почте	Самостоятельная работа - 30 часов	Проверка выполненного письменного задания на сессии. .	до 15 баллов

Содержание	Методы	Ресурсы	Трудоемкость	Способ контроля	Оценка
Четвертая сессия					
Модуль 1 Комбинаторика и теория вероятностей. Специальные и дополни-тельные конструкции в задачах.	Лекция, тренинги по практическо-му решению задач в группах	Распечатки методических материалов и заданий	10 аудиторных часов с преподавателем, 2 часа самостоятельно	Преподаватель, проводящий занятие	до 10 баллов
Модуль 2 Бесконечные суммы и произведения. Асимптотическое поведение. Применение к решению практических, в частности, экстремальных задач.	Лекция, тренинги по практическому решению задач в группах	Распечатки методических материалов и заданий	10 аудиторных часов с преподавателем, 2 часа самостоятельно	Преподаватель, проводящий занятие	до 10 баллов
Модуль 3 Комбинаторная геометрия. Пространствен-ные конструкции.	Лекция, тренинги по практическому решению задач в группах	Распечатки методических материалов и заданий	10 аудиторных часов с преподавателем, 2 часа самостоятельно	Преподаватель, проводящий занятие	до 10 баллов
Олимпиада	Индивидуа-льное соревнование по решению задач	Распечатки заданий	Аудиторная работа – 2 часа Самостоятельная работа – нет	Жюри	до 15 баллов
Матбой	Командное соревнование по решению задач	Распечатки заданий	Аудиторная работа – 4 часа Самостоятельная работа – 6 часов	Жюри	до 20 баллов
Выполнение и защита	Работа с научным	Методические материалы, книги	Аудиторная работа – 4 часа	Контроль научного руководителя,	до 20 баллов

исследовате-льской работы	руководителем		Самостоятельная работа – 6 часов	итоговая конференция	
Видеоконференция	Проблемная лекция для учащихся и слушателей видеоконференции	Методические материалы, книги	Аудиторная работа – 2 часа	Преподаватель, проводящий занятие	Не оценивается
Межсессионная работа	Выполнение домашнего задания и выполнение исследовательской работы	Материалы, в том числе передаваемые по электронной почте	Самостоятельная работа - 30 часов	Проверка выполненного письменного задания на сессии. .	до 15 баллов

<u>Требования к условиям организации образовательного процесса</u>

Ресурсами, используемыми в программе, являются:

1. Комплекты методических материалов. Эти комплекты соответствуют каждому модулю, разрабатываются преподавателями и раздаются обучающимся в качестве раздаточного материала. Также помещаются в дистанционную систему обучения. Комплект состоит из:
   Теоретических сведений по модулю.
   Примеров выполнения заданий.
   Примеров решения олимпиадных задач по теме модуля.
   Комплекта задач для самостоятельной работы.
   Ответов и решений задач для самостоятельной работы.

   Темы комплектов соответствуют названиям модулей (см. табл. раздела «Учебно-тематический план занятий»)
   Число комплектов: 30
   Число распечаток каждого комплекта: по числу обучающихся.

2. Учебники: перечень учебников приводится в списке литературы

Образовательная среда должна быть дружественной к обучающимся и преподавателю. Для комфортного проведения занятий по дисциплине требуется одна аудитория на 45-50 мест и 2-3 аудитории на 15-20 мест.

В аудиториях располагаются

- столы для размещения обучающихся,
- стол для преподавателя,
- персональный компьютер, имеющий выход на проектор и выход в сеть Интернет,
- проектор и экран,
- доски (маркерные или меловые), ориентировочный общий размер – 4 м на 1,5 м.,
- должен быть обеспечен постоянный доступ преподавателей к принтеру.

Аудитория должна иметь хорошее освещение. Предполагается, что обучающиеся будут проводить в аудитории от 6 до 8 часов ежедневно.

Для размножения материалов желательно иметь многофункциональный печатный комплекс цветной печати высокой производительности.

Расходные материалы (на всю программу):
Бумага – 35 пачек (включая потребности в размножении материалов).
Маркеры или мел – 180 шт.

Оценка реализации программы и образовательные результаты программы

Оценка работы по итогам каждой сессии проводится по 100 – балльной шкале.

Содержательный модуль	Оценка в баллах	Кто оценивает
Решение задач на практических занятиях (3 модуля в течение одной сессии)	0 – 30 (1 балл за задачу, макс. 10 баллов за модуль)	Преподаватель, проводящий практические занятия
Выполнение домашнего задания	0-15 (1 балл за задачу)	Преподаватель, проводящий практические занятия или проверяющий домашнее задание
Олимпиада	0-15 (до 3 баллов за задачу)	Жюри олимпиады, в которое входят преподаватели
Матбой	0-20 (до 10 баллов за решение задачи, до 3 баллов за оппонирование и рецензирование, макс оценка 10 баллов)	Преподаватели, проводящие матбой
Выполнение и защита исследовательской работы	0-20 (до 15 баллов за решение задачи, до 5 баллов за формулирование результатов и презентацию, макс оценка 20 баллов)	Преподаватели, оценивающие исследовательские работы
Итого	100	

Дополнительно обучающийся, выполнивший значительную исследовательскую работу за весь период обучения, может получить до 100 баллов

Содержательный модуль	Оценка в баллах	Кто оценивает
Работа с литературой, написание обзора литературы	0 - 10	Научный руководитель
Участи в постановке задачи и выбор метода исследования (решения)	0 - 10	Научный руководитель
Проведение исследований, выполнение этапов	0 - 50	Научный руководитель

Написание текста работы	0 - 10	Научный руководитель, рецензент
Защита работы	0 - 20	Комиссия (жюри конференции), научный руководитель
Итого	100	

Таким образом, обучающийся за время обучения по программе может получить до 500 баллов.

Итоговая оценка за программу получается суммированием оценок, полученных за каждую сессию и за выполнение исследовательской работы, и делением полученной суммы на 5.

<u>Требования к кадровому составу</u>

Педагогический состав программы: 5 штатных единиц преподавателей.
Каждый преподаватель должен иметь высшее образование по профилю, иметь опыт не менее 1 года проведения математических кружков, спецкурсов, олимпиадной подготовки школьников и т.п., желательно иметь степень кандидата или доктора физико-математических наук.

Для проведения лекционных, практических занятий, олимпиад, составления заданий для домашней работы и составления методических материалов (п.1,2,3,6 таблицы «Образовательные технологии») преподаватели должны обладать знаниями и иметь компетенции:

- знать теоретическую и практическую составляющие, обозначенные в разделе «Учебно-тематический план занятий»,
- знать основные методы решения олимпиадных и исследовательских задач,
- уметь оценивать решения задач, предложенные обучающимися, в частности, выделять предложенную идею, находить логические ошибки, оценивать полноту выполнения технических этапов,
- знать критерии оценивания работ итоговой аттестации по программам среднего общего образования,
- иметь опыт работы с группой обучающихся, имеющих существенно разную базовую подготовку.

Для проведения математических боев и руководства исследовательскими работами (п.4,5 таблицы «Образовательные технологии») преподаватели должны обладать знаниями и иметь компетенции:

- знать теоретическую и практическую составляющие, обозначенные в разделе «Учебно-тематический план занятий»,
- знать основные методы решения олимпиадных задач,
- иметь опыт научной работы,
- иметь опыт научного руководства,
- уметь оценивать решения исследовательских задач, предложенные обучающимися, в частности, выделять предложенную идею, находить логические ошибки, оценивать полноту выполнения технических этапов,
- уметь вести научную дискуссию, формулировать рецензии и заключения комиссии, уметь работать в составе жюри конференции школьников.

Для проведения лекционных, практических занятий, олимпиад, составления заданий для домашней работы и составления методических материалов (п.1,2,3,6 таблицы «Образовательные технологии») требуется работа преподавателей в количестве 3 человек. Общий объем работы 136 часов на всю программу.
Для проведения матбоев и руководства исследовательскими работами (п.4,5 таблицы «Образовательные технологии») требуется работа преподавателей в количестве 1-2 человек. Общий объем работы от 24 до 80 часов на всю программу, в зависимости от числа исследовательских работ и их качества.

<u>Дидактические материалы к программе</u>

В качестве дидактических материалов приведены примеры теоретического изложения и задач на тему «Многочлены» (раздел «Учебно-тематический план занятий», Сессия 2, Модуль 1.)

Эти примеры решения задач включаются в методический комплект, который выдается обучающимся.

Характерной особенностью методических комплектов является наличие подборок (серий) задач, посвященных одной теме, показывающих многостороннее применение обсуждаемых идей и методов, возрастающих по трудности решения. Решения задач написаны подробно и не требуют дополнительных комментариев преподавателя, т.е. применимы для самостоятельного изучения.

Многочлены

<u>Определение:</u> функция от действительной переменной *x*, которая может быть представлена в виде $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, называется многочленом над Ў. Числа $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ называются коэффициентами многочлена и далее считаются действительными. Наибольшая степень переменной *x*, коэффициент перед которой не равен 0, называется степенью многочлена. Степень многочлена *f* будем обозначать символом deg *f*. Например, $\deg\,(3x^4 + 5x) = 4$.

Разные наборы коэффициентов $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ задают разные многочлены, т.е. два многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ и $g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_{n-1}x + b_n$ равны тогда и только тогда, когда $a_0 = b_0, a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$. Равенство многочленов понимается как равенство функций: $f(x) = g(x)$ при любом вещественном значении переменной *x*.

Результат умножения многочлена на любое число есть многочлен; сумма многочленов и произведение многочленов также являются многочленами.

Деление одного многочлена на другой в обычном смысле слова, как правило, невозможно. Однако возможно деление с остатком, похожее на деление с остатком в кольце целых чисел.

<u>Теорема 1 (Теорема о делении многочленов с остатком).</u>

Для данных многочленов f и g существуют такие многочлены q и r, что $f = qg + r$ и либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg g$. Многочлены q и r определены этими условиями однозначно.

Пример: $x^6 + 2x^4 + 5x^2 + 7x + 3 = (x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 4) + 7x - 1$. В этом случае делимое $f = x^6 + 2x^4 + 5x^2 + 7x + 3$, делитель $g = x^2 + 1$, неполное частное $q = x^4 + x^2 + 4$, остаток $r = 7x - 1$.

Нахождение таких многочленов q и r называется *делением с остатком* многочлена f на g. При этом q называется *неполным частным*, а r - *остатком* от деления f на g. Многочлен f делится на g тогда и только тогда, когда $r = 0$.

Особое значение имеет деление с остатком на линейный двучлен $x-c$. В этом случае остаток имеет степень, меньшую единицы, т.е. является числом. Таким образом, результат деления с остатком многочлена f на $x-c$ имеет вид $f(x)=(x-c)q(x)+r \quad (r\in\mathbf{R})$.

Отсюда следует, что

$$f(c)=r,$$

т.е. остаток равен значению многочлена f в точке c. Это утверждение называется *теоремой Безу*.

Теорема 2 (Теорема Безу).

Остаток от деления многочлена на $x-c$ равен значению многочлена в точке c. Многочлен делится на $x-c$ тогда и только тогда, когда c - корень многочлена.

Деление с остатком на $x-c$ осуществляется по замечательно простой схеме, называемой *схемой Горнера*.

А именно, пусть

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=(x-c)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1})+r.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x, получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
&a_0=b_0,\\
&a_1=b_1-cb_0,\\
&a_2=b_2-cb_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n-1}=b_{n-1}-cb_{n-2},\\
&a_n=r-cb_{n-1},
\end{aligned}$$

откуда находим следующие рекуррентные формулы для $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ и r:

$$\begin{aligned}
&b_0=a_0,\\
&b_1=a_1+cb_0,\\
&b_2=a_2+cb_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&b_{n-1}=a_{n-1}+cb_{n-2},\\
&r=a_n+cb_{n-1}.
\end{aligned}$$

Исходные данные и результаты вычислений удобно расположить в виде таблицы (схема Горнера):

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
c	b_0	b_1	b_2	...	b_{n-1}	r

Каждое число во второй строке этой таблицы, начиная с b_1, находится как сумма числа, стоящего над ним, и числа, стоящего слева, умноженного на c.

Пример. Докажите, что многочлен $x^4-2x^3-8x^2+13x-24$ делится на $x+3$.

Решение. Найдем остаток от деления $x^4-2x^3-8x^2+13x-24$ на $x+3$, для этого подставим $x=-3$ и воспользуемся для вычислений схемой Горнера.

(В верхней строке пишутся коэффициенты исходного многочлена, в нижней строке получаются коэффициенты частного и остаток. Первый коэффициент в нижней строке берется равным стоящему над ним. Далее каждое число в нижней строке получается по правилу: берется число, записанное в нижней строке слева от вычисляемого, умножатся на число, стоящее в уголке слева и результат складывается с коэффициентом, стоящим сверху.)

	1	–2	–8	13	–24
–3	1	–5	7	–8	0

Это означает, что $x^4-2x^3-8x^2+13x-24=\left(x^3-5x^2+7x-8\right)(x+3)$. Последнее число в нижней строке – остаток от деления, он равен 0.

Это, в свою очередь, доказывает делимость $x^4-2x^3-8x^2+13x-24$ на $x+3$.

Схема Горнера дает очень эффективный способ вычисления значений многочлена.

Пример. Найдем значение многочлена

$$f=2x^6-11x^4-19x^3-7x^2+8x+5$$

в точке $x=3$. По схеме Горнера получаем:

	2	0	−11	−19	−7	8	5
3	2	6	7	2	−1	5	20

Таким образом, $f(3)=20$.

Теорема Безу позволяет доказать следующую теорему

Теорема 3.(О числе корней многочлена). *Число действительных корней ненулевого многочлена не превосходит его степени.*

Пусть c_1 -корень многочлена f . Тогда $f=(x-c_1)f_1$. Пусть c_2 -корень многочлена f_1. Тогда $f_1=(x-c_2)f_2$, следовательно $f=(x-c_1)(x-c_2)f_2$. Продолжив дальше, мы представим многочлен в виде $f=(x-c_1)(x-c_2)...(x-c_k)g$, где многочлен g не имеет корней. Числа $c_1,c_2,...c_k$ - это все корни многочлена f . Действительно, для некоторого числа x_0 $f(x_0)=(x_0-c_1)(x_0-c_2)...(x_0-c_k)g(x_0)$. И так как $g(x_0)\neq 0$, то $f(x_0)=0$ только если $x_0=c_i$ для какого то i. Таким образом, число корней многочлена не превосходит его степени n, и количества чисел k . Оно может быть меньше k , если среди чисел $c_1,c_2,...c_k$ есть совпадающие.

Теорема 4 (Теорема о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами.) *Пусть дан многочлен* $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$, *где коэффициенты* $a_0,a_1,...,a_{n-1},a_n$ - *целые. Если число* $x_0=\dfrac{m}{k}$ *является рациональным корнем этого многочлена, то* m - *делитель* a_n *и* k - *делитель* a_0.

Эта теорема используется при решении уравнений. Можно составить набор рациональных чисел, в этом наборе содержатся все рациональные корни уравнения, если они существуют.

Пример. Решите уравнение $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12=0$.

Воспользуемся теоремой о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами.

Делители свободного члена 12 – это числа $1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,6,-6,12,-12$. Они – возможные числители рациональных дробей, которые мы сейчас составим.

Делители старшего коэффициента 6 – это числа $1,2,3,6$. Они – возможные знаменатели рациональных дробей.

Составим всевозможные дроби с указанными числителями и знаменателями.

$-1,-2,-3,-4,-6,-12,1,2,3,4,6,12$

$-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}$

$-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$

$-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}$

Повторяющиеся дроби, полученные после сокращения на общий множитель, написаны один раз. Например, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Все рациональные корни уравнения содержатся в написанном множестве.

По очереди подставляем эти числа в уравнение. Если получится тождество, значит, мы нашли корень.

Подстановку всех чисел из указанного множества здесь приводить не будем. Начинаем с целых чисел и очень скоро получаем

$$6(-3)^4 + 19(-3)^3 - 7(-3)^2 - 26(-3) + 12 = 486 - 513 - 63 + 78 + 12 = 0.$$

Рекомендуется такую подстановку вычислять с применением схемы Горнера, это значительно упрощает вычисление.

	6	19	–7	–26	12
–3	6	1	–10	4	0

Воспользовавшись схемой Горнера, мы сразу нашли коэффициенты многочлена, который получается при делении $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$ на $x + 3$.

$$6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = (6x^3 + x^2 - 10x + 4)(x + 3).$$

Итак, один корень мы уже знаем. Теперь нам требуется решить уравнение пониженной, третьей степени.

$$6x^3 + x^2 - 10x + 4 = 0.$$

Снова напишем множество возможных корней этого многочлена. Оно получается из предыдущего множества отбрасыванием уже проверенных целых корней и лишних дробей (с числителем 3).

$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$

$-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}$

Подстановкой этих чисел по очереди убеждаемся, что $\frac{1}{2}$ - корень.

	6	1	–10	4
$\frac{1}{2}$	6	4	–8	0

Это означает, что левая часть уравнения раскладывается на множители

$$6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = (6x^2 + 4x - 8)(x - \frac{1}{2})(x + 3) = (3x^2 + 2x - 4)(2x - 1)(x + 3) = 0$$

Остается решить квадратное уравнение

$$3x^2 + 2x - 4 = 0$$

Его корни $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}$.

Ответ: $-3, \frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}$

Электронные ресурсы программы

Используется среда дистанционного образования, позволяющая
- подключать обучающихся и преподавателей,
- размещать методические материалы и организовывать материалы в единую структуру,
- размещать задания в виде тестов,
- размещать задания в виде письменных заданий, требующих в качестве ответа загружать файлы с текстом и рисунки,
- организовывать форумы или обсуждение, доступное всем участникам учебной группы,
- контролировать выполнение заданий обучающимися.

Также может быть использована электронная библиотека задач Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО) problems.ru

Описание взаимодействия с партнерами

Партнерами программы являются
- общеобразовательные организации Ленинградской области,
- муниципальные центры дополнительного образования,
- вузы Санкт-Петербурга и Ленинградской области,
- Санкт-Петербургский государственный университет.

Взаимодействие с общеобразовательными организациями Ленинградской области (гимназиями, лицеями, школами):
- информирование учащихся о наборе на программу и рекомендация наиболее подготовленным учащимся принять участие в конкурсном отборе;
- обсуждение тем работы семинаров, элективных курсов, кружков внеурочной деятельности с учителями математики и, при необходимости, планирование и методическое руководство;
- олимпиадная подготовка обучающихся;
- методическая поддержка учителей.

Взаимодействие с муниципальные центры дополнительного образования:
- проведение муниципальных олимпиад;
- обсуждение тем работы курсов, при необходимости, планирование и методическое руководство;
- олимпиадная подготовка обучающихся;
- методическая поддержка преподавателей.

Взаимодействие с вузами Санкт-Петербурга и Ленинградской области
- привлечение преподавателей вузов к работе по программе;
- проведение олимпиад РСОШ.

Взаимодействие с Санкт-Петербургским государственным университетом
СПбГУ обеспечивает научное и методическое руководство программой, подбор и привлечение преподавателей. Проводит информирование обучающихся о возможностях получения образования в СПбГУ, об образовательных программах, реализуемых университетом, привлекает обучающихся к участию в олимпиаде школьников СПбГУ.

Описание моделей постпрограммного сопровождения

- Обучающиеся, успешно освоившие программу, имеют преимущества в подготовке, что должно способствовать более успешному участию в конкурсных испытаниях и олимпиадах.
- Обучающиеся, показавшие выдающиеся результаты, могут впоследствии привлекаться к проведению матбоев, олимпиад, кружков и т.д., как в рамках реализации программы, так и другими организациями - партнерами.

Литература:

1. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике. 2014 г. М.: МЦНМО, 2015, - 160 с.
2. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике. 2015 г. М.: МЦНМО, 2016, - 128 с.
3. Н. Агаханов. Всероссийские олимпиады школьников по математике. 1993-2009. М.:МЦНМО, 2017, - 552 с.
4. Избранные задачи олимпиады школьников СПбГУ по математике // СПб.: ВВМ, 2013
5. Берлов С.Л., Иванов С.В., Кохась К.П. Петербургские математические олимпиады / СПб.: Издательство «Лань», 1998
6. Медников Л.Э., Шаповалов А.М. Турнир городов. Мир математики в задачах. М., МЦНМО, 2012
7. Р.М.Федоров, А.Я.Канель-Белов, А.К.Ковальджи, И.В.Ященко. Московские математические олимпиады. 1993-2005, М.: МЦНМО, 2006, - 464 с.
8. Шаповалов А.М., Медников Л.Э. Как готовиться к математическим боям. 4000 задач турнира им. А.П.Савина // М:. МЦНМО, 2017
9. Балаян Э.Н. 750 лучших олимпиадных и занимательных задач по математике 7-8 классы// Ростов-наДону, Феникс, 2017
10. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре. // 8-9 кл. М.: Просвещение, 2010.
11. Мордкович А.Г., Николаев Н.П. Алгебра. В 2 ч. Ч.1 Учебник для 9 кл. // М.: Мнемозина, 2014
12. Мордкович А.Г., Николаев Н.П. Алгебра. В 2 ч. Ч.2 Учебник для 9 кл. // М.: Мнемозина, 2014
13. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И.// Алгебра и математический анализ. / В 2 т. Т.1 10 кл. Т.2 11кл. М.: Мнемозина, 2013
14. Мордкович А.Г., Звавич Л.И. Алгебра и начала анализа. (Профильный уровень) // 10-11 кл. М.: Мнемозина, 2013
15. Пратусевич М.Я., Столбов К.М., Головин А.И. Алгебра и начала анализа. // В 2 т. Т.1 10 кл. Т.2 11кл. М.: Просвещение, 2014.
16. Виноградов И.М. Основы теории чисел. Любое издание.
17. Н.Я. Виленкин, А.Н.Виленкин, П.А.Виленкин. Комбинаторика // М.:МЦНМО, 2007
18. В.В. Прасолов. Многочлены // М.:МЦНМО, 2003
19. И.Ф.Шарыгин. Факультативный курс по математике. Решение задач. 10 кл. М.: Просвещение, 1989, - 352 с.
20. И.Ф. Шарыгин, В.И. Голубев. Факультативный курс по математике. Решение задач. 11 кл .М.: Просвещение, 1991, - 384 с.

21. М.И. Башмаков, Б.М. Беккер, В.М. Гольховой, Ю.И. Ионин. Алгебра и начала анализа: задачи и решения. М.: Высшая школа, 2004.
22. О.А.Иванов. Практикум по элементарной математике: Алгебро-аналитические методы. М.:МЦНМО, 2001, - 320 с.
23. О.А.Иванов. Задачи по алгебре и началам анализа. СПб,: БХВ-Петербург, 2005, - 384 с.
24. Алфутова Н.Б., Устинов А.В., Алгебра и теория чисел. Сборник задач. М., МЦНМО, 2002
25. Калинин А.Ю, Терешин Д.А. Геометрия 10-11 кл. // М.: МЦНМО, 2011
26. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. // М.: МЦНМО, 2006
27. Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии // М.: Наука, 1989
28. Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии. 7-11 классы. // СПб.: Петроглиф, Виктория плюс, 2012.
29. Зив Б.Г. Дидактические материалы по геометрии для 8-11 класса // М.: Просвещение, 2002-2003.
30. Зив Б.Г, Мейлер В.М, Баханский А.Г. Задачи по геометрии. 7-11 кл. // М.: Просвещение, 2003
31. Г.И. Вольфсон, М.Я. Пратусевич, С.Е. Рукшин, К.М. Столбов, И.В. Ященко Математика. Арифметика и алгебра. // М., МЦНМО, 2016
32. С.А.Шестаков Математика. Задачи с параметром// М., МЦНМО, 2016
33. С.А.Шестаков Математика. Неравенства и системы неравенств// М., МЦНМО, 2017
34. Гордин Р.К. Математика. Геометрия. Стереометрия // М., МЦНМО, 2017
35. Гордин Р.К. Математика. Решение задачи 16 (Профильный уровень) // М., МЦНМО, 2017